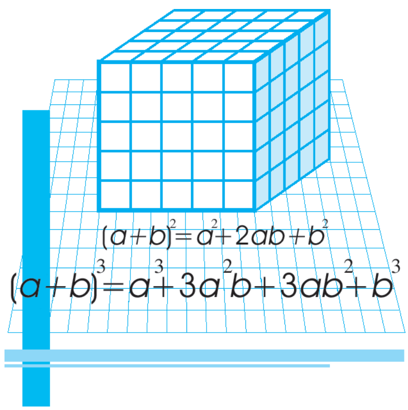
Ш. А. АЛИМОВ, А. Р. ХОЛМУХАМЕДОВ,
М. А. МИРЗААХМЕДОВ

АЛГЕБРА

Учебник для 7 классов школ общего среднего образования

Издание четвертое
переработанное и дополненное

Утвержден Министерством народного образования Республики Узбекистан



ИЗДАТЕЛЬСКО-ПОЛИГРАФИЧЕСКИЙ
ТВОРЧЕСКИЙ ДОМ „O‘QITUVCHI“
ТАШКЕНТ — 2017

УДК: 512(075.3)
ББК 22.14я72
А 50

Дорогие ребята!

Вы — будущее независимого Узбекистана, и наше государство надеется, что вы станете хорошими специалистами. Но для этого нужно приложить немало усилий.

Алгебра — один из самых интересных и увлекательных школьных предметов, знание которого необходимо во многих областях человеческой деятельности.

Пусть этот учебник будет вашим помощником на пути к знаниям.

Авторы

Условные обозначения:

— основные правила и свойства.

○ — начало обоснования математического утверждения или вывода формулы.

● — конец обоснования или вывода формулы.

△ — начало решения задачи.

▲ — конец решения задачи.

№ — занимательные задачи.

25, 42, ... — более сложные задачи.

— проверочные задания.

— самостоятельная работа для проверки знаний основного материала

— исторические сведения.

Приведенные в задачах цены следует рассматривать как условные.

Издано за счет средств Республиканского целевого книжного фонда для выдачи в аренду.

ISBN 978-9943-22-101-7

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ КУРСА МАТЕМАТИКИ 5–6 КЛАССОВ

В 5–6 классах вы решали примеры и задачи в четыре действия над натуральными и целыми числами, обыкновенными и десятичными дробями. Для закрепления пройденного материала вам предлагается решить следующие примеры и задачи.

1. Строительство современных домов в „Год диалога с народом и интересов человека" подарит городу еще большую красоту. Квартиры в новом многоэтажном доме пронумерованы числами 1, 2, 3, ..., 99, 100. Сколько квартир имеют номера, суммы которых равны между собой. Представьте результат в виде таблицы и диаграммы.

2. Число коров на одной ферме на 12 % меньше, чем на другой. Но каждая корова с первой фермы дает на 7,5 % молока больше. Какая ферма и на сколько больше молока получает?

3. После сушки масса зерна уменьшилась на 20 кг и равнялась 300 кг, а влажность составила 10 %. Чему равнялась влажность зерна первоначально?

4. Решите уравнения:

1) $5x+48:4=20:10+2\cdot 10$;

2) $7x+32:2=(72+18):3$;

3) $4\frac{1}{2}x+3\frac{3}{10}\cdot 5=7\frac{6}{13}+18\frac{7}{13}$;

4) $6\frac{1}{2}x+3\frac{1}{2}\cdot 3=11\frac{4}{17}+5\frac{13}{17}$.

5. Ахмад ехал на велосипеде 1 час 15 минут со скоростью 10,8 км/ч. Затем он ехал 2,5 часа со скоростью 12,8 км/ч. Сколько километров пути проехал Ахмад?

6. Длина прямоугольника 8 см, а ширина на 1,5 см короче. Найдите площадь прямоугольника.

7. Площадь прямоугольника 20,25 дм^2, ширина 3,24 дм. Найдите периметр этого прямоугольника.

8. Автомобиль расходует на 100 км пути 5 л бензина. Сколько бензина расходуется на путь: 50 км; 60 км; 70 км; 80 км; 120 км; 250 км; 360 км?

9. Турист прошел $\frac{2}{7}$ своего маршрута. Подсчитав, он обнаружил, что до середины пути ему осталось пройти 9 км. Какова длина пути, намеченного туристом?

10. Один автомобиль расходует на 100 км пути 8 л бензина. Другой автомобиль на том же пути расходует 10 л. На сколько километров пути хватит горючего в баках автомобилей, если в каждом баке имеется по 32 л бензина?

11. 1) Цена товара была снижена сначала на 20 %, а затем цена была снижена еще на 25 %. На сколько процентов была снижена первоначальная цена товара?
2) Цену ткани повысили сначала на 20 %, а затем повысили еще на 25 %. На сколько процентов была повышена первоначальная цена товара?

12. Влажность зерна составляла 23 %. После сушки она составила 12 %. На сколько процентов уменьшилась масса зерна?

13. Предприниматель, продав товары 1-го и 2-го вида получил 54 000 сумов прибыли. Цена 1-го вида товара была равна 120 000 сумов, предприниматель продал его с 15 % прибылью. 2-й вид товара был продан с 20 % прибылью. Какова цена 2-ого вида товара? Чему равна прибыль от продажи двух видов товара?

14. На сколько процентов увеличится площадь прямоугольника, если длину его основания увеличить на 20 %, а высоту на 25 %?

15. На сколько процентов уменьшится площадь прямоугольника, если длину его основания уменьшить на 10 %, а высоту на 20 %?

16. Выполните действия:

1) $(-120):((-8)\cdot(-3)+12:(-3))-(-48):(-16)$;

2) $(-75)\cdot4-204:(-3)+(-210):(-7)$;

3) $(-20,25):(-3,6)+90,72:(-4,5)-7,5\cdot3,2$;

4) $5\frac{5}{19}\cdot(-0,95)+2\frac{16}{17}\cdot(-0,34)-8\frac{4}{7}:2\frac{1}{7}$.

17. Решите уравнения:

1) $3x+2x=17+(-27)$;

2) $6x-7x=3,5\cdot(-1)+4$;

3) $1,3x-3,5x=11\cdot(-0,5)$;

4) $4x-2\frac{1}{3}x=3\frac{1}{3}:(-2)$.

18. Среднее арифметическое пяти чисел равно 18,4. Среднее арифметическое этих же чисел и еще одного числа равно 20. Найдите добавленное число.

19. Дедушке Кариму 90 лет. Средний возраст его внуков 20 лет. Если сложить возраст всех внуков с возрастом дедушки Карима и найти их среднее арифметическое, то получится 22. Сколько внуков у дедушки Карима?

20. Автомобиль проехал 3,5 часа со скоростью 72 км/ч и 2,5 часа со скоростью 60 км/ч. Какой путь прошел автомобиль? Какова средняя скорость его движения?

21. Найдите неизвестный член пропорции:

1) $3,5:x=2,4:4,8$;

2) $x:2\frac{1}{3}=9,2:2,3$;

3) $7,2:2,4=x:4\frac{1}{3}$;

4) $4\frac{2}{7}:2\frac{1}{7}=3,2:x$.

ГЛАВА I

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ

§ 1 Числовые выражения

Термин *алгебра* происходит от названия сочинения выдающегося математика и астронома Мухаммада аль-Хорезми «Китаб аль-джебр валь-мукабала» («Книга о восстановлении и противопоставлении»), в которой впервые в истории науки последовательно изложены основы алгебры как научной дисциплины.

Основная задача алгебры — изучение свойств математических действий, производимых над алгебраическими выражениями. Наиболее простые алгебраические выражения, а именно числовые выражения, рассматривались в курсе математики 5—6 классов.

Напомним, что числовые выражения составлены из чисел, соединенных знаками арифметических действий. Например, $2 \cdot 3+7$; $10:2-3$; $\frac{4 \cdot 0,5+3}{5}$; $\frac{1}{3}-\frac{1}{2}$.

Значением числового выражения *называется число, полученное в результате выполнения действий, указанных в этом числовом выражении.*

Например, значением числового выражения $2 \cdot 3+7$ является число 13, значением числового выражения $\frac{1}{3}-\frac{1}{2}$ является число $-\frac{1}{6}$.

Числовое выражение может состоять из одного числа. Его значением является само это число.

Иногда в числовом выражении, кроме чисел и знаков действий, используются скобки, указывающие на порядок выполнения действий. Например, в числовом выражении $(2,5+3,5) \cdot 2,1$ следует выполнить сложение в скобках и лишь затем умножение.

Абу Абдуллах Мухаммад ибн Муса аль-Хорезми (783—850) — великий узбекский математик и астроном.

Вычислив значение этого выражения, получим число 12,6. Поэтому можно записать $(2{,}5+3{,}5)\cdot 2{,}1=12{,}6$.

Два числовых выражения, соединенные знаком «=», образуют ***числовое равенство.***

Если значения левой и правой частей числового равенства совпадают, то равенство называют ***верным равенством.***

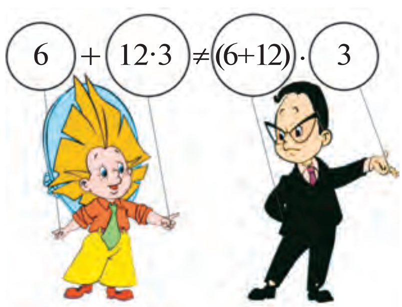
Например, $\frac{15-1}{2}=8-1$ — верное равенство, так как значения его левой и правой частей совпадают и равны числу 7.

Числовые выражения и равенства используются как для записи вычислений, так и для записи свойств чисел и операций над ними.

Например, равенство $\frac{3}{4}=\frac{6}{8}$ выражает основное свойство дробей, равенство $35+21=21+35$ — переместительный закон сложения.

Рассмотрим теперь числовое выражение $6+12\cdot 3$. Правильный результат получится только в том случае, если будет соблюдаться известный порядок действий:

$$6+12\cdot 3=6+36=42.$$



Если нарушить указанный порядок вычисления и сложить прежде числа 6 и 12, а затем результат умножить на 3, то получится неверный результат, а именно число 54. Этот результат был бы верным, если бы числовое выражение было записано подобно вышеприведенному в виде $(6+12)\cdot 3 = 18\cdot 3 = 54$.

Иными словами, правильность вычисления связана с порядком выполнения действий, указанных в числовом выражении.

Порядок выполнения действий над числами сохраняется также и при выполнении упражнений, относящихся к нахождению числовых значений алгебраических выражений.

Напомним, что сложение и вычитание называют *действиями первой ступени,* умножение и деление — *действиями второй ступени,* возведение в квадрат и куб — *действиями третьей ступени.*

При нахождении числового значения алгебраического выражения принят следующий *порядок выполнения действий*:

1) Если выражение не содержит скобок, то сначала выполняются действия третьей ступени, затем действия второй ступени, и, наконец, действия первой ступени. При этом действия одной и той же ступени выполняются в том порядке, в котором они записаны.

Например,

$$3\cdot 5^2\cdot 4-5\cdot 4+7=3\cdot 25\cdot 4-5\cdot 4+7=300-20+7=280+7=287.$$

2) Если выражение содержит скобки, то сначала выполняются все действия над числами, заключенными в скобках, а затем все остальные действия. При этом все действия в скобках и все действия вне их выполняются в порядке, указанном в п. 1.

Например,

$$(2^3\cdot 4-5)\cdot 6+(2+2\cdot 4)=(8\cdot 4-5)\cdot 6+(2+2\cdot 4)=$$

$$=(32-5)\cdot 6+(2+8)=27\cdot 6+10=162+10=172.$$

3) Если вычисляется значение дроби, то сначала выполняются действия в числителе и знаменателе дроби, а затем первый результат делится на второй.

Например,

$$\frac{2\cdot 3^3-3\cdot 5}{3+5^2}=\frac{2\cdot 27-3\cdot 5}{3+25}=\frac{54-15}{28}=\frac{39}{28}=1\frac{11}{28}.$$

4) Если выражение содержит скобки, заключенные внутри других скобок, то сначала выполняются действия во внутренних скобках.

Например,

$$2\cdot(8-(5^2-4))=2\cdot(8-(25-4))=2\cdot(8-21)=2\cdot(-13)=-26.$$

Упражнения

1. Выполните действия:

1) $2,17+(3,2-0,17)$;
2) $9,49-(1,5+0,99)$;
3) $13\frac{7}{9}-\left(2,64+2\frac{7}{9}\right)$;
4) $6\frac{7}{8}-\left(3,14-2\frac{1}{8}\right)$.

2. Найдите значение числового выражения:

1) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{4}\right)$;
2) $\left(\frac{2}{7}-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(\frac{2}{13}-\frac{1}{2}\right)$;
3) $\left(0,3-\frac{1}{20}\right):\left(\frac{3}{4}-1,25\right)$;
4) $\left(2,7-\frac{1}{5}\right):\left(\frac{1}{2}+4,5\right)$.

3. Напишите несколько числовых выражений, значение которых равно: 1) 8; 2) 0; 3) 1; 4) −14.

4. Верно ли равенство:

1) $\frac{12,5-4,1}{4}=1,7+0,4$;
2) $\frac{0,75-0,15}{2}=0,15+0,25$;
3) $\frac{2,13+4,33}{7,58-4,35}=1\frac{5}{12}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$;
4) $\frac{8,92-6,61}{5,38-1,55}=2\frac{1}{9}-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$?

Запишите в виде числового равенства **(5—6):**

5. 1) сумма чисел $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{5}$ равна разности чисел $\frac{2}{3}$ и $\frac{2}{15}$;
2) произведение чисел 40 и 0,03 равно частному от деления числа 6 на число 5.

6. 1) удвоенная разность чисел 10 и −2 в три раза больше суммы этих же чисел;

2) утроенная сумма чисел 2 и 6 в два раза больше произведения этих же чисел.

7. Найдите значения числовых выражений, воспользовавшись законами арифметических действий:

1) $1{,}7\cdot 3^2+\frac{2}{3}\cdot 12-15;$ 3) $48\cdot 0{,}05-\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot 54+1{,}7;$

2) $27{,}7-\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot 100+6{,}4:0{,}8;$ 4) $(2{,}5)^2+15\cdot\frac{3}{5}-0{,}24:0{,}6.$

8. Найдите значение числового выражения:

1) $\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\right)\cdot\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{2}\right);$ 3) $4\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\cdot\left(1\frac{7}{9}-\frac{1}{9}\right);$

2) $\left(\frac{4}{7}-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{13}-\frac{1}{4}\right);$ 4) $5\frac{1}{7}-\frac{1}{7}\cdot\left(1\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\right).$

9. Выполните действия:

1) $\dfrac{0{,}3\cdot 5^2-15}{3{,}5+2^2};$ 3) $13\frac{1}{3}\cdot(18{,}1-(3^2+6{,}1));$

2) $\dfrac{4{,}2:6-3\frac{1}{3}\cdot 0{,}3}{7{,}5:0{,}5};$ 4) $((7{,}8:0{,}3-3^3)+3{,}1):0{,}7.$

§ 2 *Алгебраические выражения*

Рассмотрим следующие задачи.

Задача 1. Задумайте какое-нибудь число, умножьте его на 3, к полученному результату прибавьте 6, найденную сумму разделите на 3 и вычтите задуманное число. Какое число получилось?

△ Пусть задумано число 8. Выполним все действия в том порядке, как это указано в условии:

1) $8\cdot 3=24$; 2) $24+6=30$; 3) $30:3=10$; 4) $10-8=2$.

Получилось число 2. Это решение можно записать в виде числового выражения $(8\cdot 3+6):3-8$, значение которого равно 2.

Если бы было задумано число 5, то получилось бы числовое выражение $(5 \cdot 3 + 6) : 3 - 5$, значение которого также равно 2.

Возникает догадка: какое бы число мы ни задумали, в результате получается число 2. Проверим это. Обозначим задуманное число буквой a и запишем действия в том порядке, как указано в условии:

$$(a \cdot 3 + 6) : 3 - a.$$

Используя известные свойства арифметических действий, упростим это выражение:

$$(a \cdot 3 + 6) : 3 - a = a + 2 - a = 2.$$

При решении задачи было получено выражение $(a \cdot 3 + 6) : 3 - a$, которое состоит из буквы a, обозначающей любое число, чисел 3 и 5, знаков действий и скобок. Это пример *алгебраического выражения*.

Приведем еще примеры алгебраических выражений:

$$2 \cdot (m + n); \quad 3a + 2ab - 7; \quad (a + b)(a - b); \quad \frac{x+y}{a}.$$

***Алгебраическое выражение** — это выражение, составленное из чисел и букв, соединенных знаками действий.*

*Если вместо букв, входящих в алгебраическое выражение, подставить некоторые числа и выполнить действия, то полученное в результате число называют **числовым значением данного алгебраического выражения.***

Например, значение алгебраического выражения $3a + 2b - 7$ при $a = 2$, $b = 3$ равно 5, так как $3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 - 7 = 5$; значение этого же алгебраического выражения при $a = 1$, $b = 0$ равно -4, так как

$$3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 - 7 = -4.$$

Значение алгебраического выражения $(a \cdot 3 + 6) : 3 - a$ равно 2 при любом значении a.

Задача 2. Найти значение алгебраического выражения $\frac{(3a + 7)b}{a - b}$ при $a = 10$, $b = 5$.

$$\triangle \quad \frac{(3 \cdot 10 + 7) \cdot 5}{10 - 5} = \frac{37 \cdot 5}{5} = 37. \quad \blacktriangle$$

10. Найдите значение алгебраического выражения:

1) $3a-2b$, где $a=\frac{1}{3}$, $b=1$;
3) $0,25a-4c^2$, где $a=4$, $c=3$;
2) $2a+3b$, где $a=3$, $b=-2$;
4) $\left(2a^2-\frac{1}{3}b\right)$, где $a=2$, $b=9$.

11. Найдите значение алгебраического выражения:

1) $\frac{1}{4}x-\frac{3}{7}y$, где $x=8, y=-14$;

2) $\frac{2}{3}x+\frac{4}{5}y$, где $x=9$, $y=-10$;

3) $\frac{a-3b}{a+3b}$, где $a=4$, $b=-2$;

4) $\frac{a+3c}{2a-c}$, где $a=3$, $c=-1$.

12. За 1 ч из нефтяной скважины выливается 7 т нефти. Сколько тонн нефти выльется из скважины за m часов? За одни сутки?

13. Сколько минут: 1) в m часах; 2) в p секундах; 3) в m часах, l минутах и p секундах?

14. Запишите утроенную разность чисел x и y. Найдите числовое значение этого выражения при:

1) $x=-0{,}37$, $y=-0{,}42$;
3) $x=-\frac{5}{6}$, $y=-\frac{9}{4}$;
2) $x=-2{,}98$, $y=-4{,}48$;
4) $x=\frac{2}{15}$, $y=-0{,}7$.

15. Запишите произведение суммы чисел x и y на их разность. Найдите значение полученного алгебраического выражения при:

1) $x=-\frac{1}{8}$, $y=\frac{1}{4}$;
3) $x=0{,}15$, $y=-0{,}75$;
2) $x=-\frac{5}{8}$, $y=\frac{3}{4}$;
4) $x=1{,}32$, $y=-1{,}28$.

Найдите значение алгебраического выражения **(16—17):**

16. 1) $\frac{2mn\,(n+k)}{n-k}$ при $m=k=\frac{1}{3}$, $n=\frac{1}{2}$;

2) $\dfrac{(3p+1)2p}{p-l}+\dfrac{1}{3}$ при $p=\dfrac{1}{3}$, $l=1$.

17. 1) $\dfrac{3(x-y)}{2p+q}$ при $x=8{,}31$, $y=2{,}29$, $p=2{,}01$, $q=2$;

2) $\dfrac{5(bc+m)}{2q+4\frac{1}{4}}$ при $b=\dfrac{2}{3}$, $c=6$, $q=\dfrac{1}{2}$, $m=\dfrac{1}{5}$.

18. Воспользовавшись формулой нечетного числа $n=2k+1$, найдите значение n при $k=0$, $k=1$, $k=7$, $k=10$.

19. Запишите в виде алгебраического выражения:
1) сумму двух последовательных натуральных чисел, из которых меньшее равно n;
2) произведение двух последовательных натуральных чисел, из которых большее равно m;
3) сумму трех последовательных четных натуральных чисел, из которых наименьшее равно $2k$;
4) произведение трех последовательных нечетных натуральных чисел, из которых наименьшее равно $2p+1$.

20. Запишите в виде алгебраических выражений периметр и площадь каждой из фигур (рис. 1).

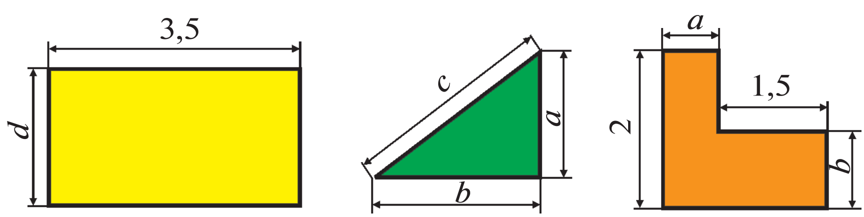


Рис. 1

21. Для отопления квартиры было запасено p тонн угля; q тонн из этого запаса было израсходовано. Сколько тонн угля осталось?
1) Вычислите при $p=20$, $q=15$; 2) может ли число q быть больше, чем число p; быть равным числу p?

22. В железнодорожной кассе было продано n билетов по 400 сумов и m билетов по 500 сумов каждый. Сколько денег выручено за все билеты? Вычислите при: 1) $n = 200$, $m = 150$; 2) $n = 100$, $m = 230$.

23. Один альбом стоит 200 сумов, одна тетрадь — 40 сумов и одна ручка — 60 сумов. Запишите в виде формулы общую стоимость (в сумах) c альбомов, a тетрадей и b ручек, обозначив ее буквой p. Вычислите по этой формуле числовое значение p, если $c = 9$, $a = 21$, $b = 4$.

24. Через станцию по транспортировке газа за одну минуту перекачивается 26 м^3 газа. Сколько кубических метров газа перекачает станция: 1) за 1 сутки; 2) за 5 суток; 3) за m суток?

25. Группа геологов, продвигаясь по своему маршруту, ехала верхом на лошадях 3 ч 10 мин со скоростью c км/час, затем плыла на плоту 1 ч 40 мин по реке, скорость течения которой a км/ч, и, наконец, шла пешком 2 ч 30 мин со скоростью b км/ч. Напишите формулу пути, который преодолели геологи, обозначив длину маршрута (в км) буквой s. Вычислите длину маршрута, если $a = 3{,}3$ км/ч, $b = 5{,}7$ км/ч, $c = 10{,}5$ км/ч.

§ 3 Алгебраические равенства. Формулы

При решении многих практических задач для обозначения чисел часто используются буквы.

Например, если a и b — длины сторон прямоугольника, то $a \cdot b$ — его площадь, $2(a + b)$ — его периметр. Буквами a и b обозначены положительные числа — длины сторон прямоугольника, измеренные одной и той же единицей длины (например, в сантиметрах).

Обозначим площадь прямоугольника буквой S, а периметр — буквой P, тогда получим формулы:

$$S = a \cdot b; \qquad P = 2 \cdot (a + b).$$

Если длины сторон измерены в сантиметрах, то S — число квадратных сантиметров, а P — число сантиметров.

ФРАНСУА ВИЕТ (1540–1603)

— известный французский математик XVI века. Считается основоположником введения в алгебру буквенной символики.

Для сокращения записи знак умножения (точка) часто опускается. Например, $S = ab$; $P = 2\ (a + b)$.

Буквами обозначают также неизвестные числа в уравнениях. Например, в уравнении $x + 12{,}3 = 95{,}1$ неизвестное число обозначено буквой x, а в уравнении $2y + 3 = 7$ — буквой y.

С помощью букв удобно также записывать законы и свойства арифметических действий. Например,

$$a-(b+c)=(a-b)-c=a-b-c, \qquad (1)$$

$$(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c, \qquad (2)$$

$$(a+b):c=a:c+b:c. \qquad (3)$$

В алгебре одна и та же буква может принимать различные числовые значения. Так, в равенствах (1) и (2) a, b, c — любые числа; в равенстве (3) a и b — любые числа, однако $c \neq 0$, так как на нуль делить нельзя.

С помощью букв можно записать *формулы четного и нечетного натуральных чисел.*

Если a — четное число, то это число делится на 2 и его можно записать так:

$$\boxed{a = 2n,}$$

где n — натуральное число.

Если b — нечетное число, то остаток деления его на 2 равен 1 и поэтому число b можно записать так:

$$\boxed{b = 2n + 1,}$$

где n — натуральное число или нуль.

Иногда формулу нечетного числа записывают так:

$$\boxed{b = 2k - 1,}$$

где k — натуральное число.

Использование букв позволяет записать ход решения многих задач одного и того же типа. Приведем примеры.

Задача 1. Садовый участок имел форму прямоугольника, длина которого равна a км, ширина — b км. После осушения заболоченного участка площадь участка увеличилась на 0,88 км². Какой стала площадь садового участка? Провести вычисления для: 1) $a = 2{,}2$ и $b = 0{,}8$; 2) $a = 1{,}4$ и $b = 4{,}3$.

△ До осушения заболоченного участка площадь сада была равна $a \cdot b$ км², после осушения она стала равной $(ab + 0{,}88)$ км²:

1) при $a = 2{,}2$ и $b = 0{,}8$ получаем $2{,}2 \cdot 0{,}8 + 0{,}88 = 2{,}64$.

2) при $a = 1{,}4$ и $b = 4{,}3$ получаем $1{,}4 \cdot 4{,}3 + 0{,}88 = 6{,}9$. ▲

Задача 2. Турист вышел из поселка и направился в город. Пройдя a километров пешком, он сел в автобус и за t часов доехал до города. Найти:

1) расстояние s (в км) между поселком и городом, если автобус двигался со скоростью 60 км/ч, $a = 5$ и $t = 0{,}5$;

2) t, если $s = 70$ и $a = 10$.

△ Турист за t часов проехал на автобусе $60t$ километров. Поэтому расстояние между поселком и городом выражается формулой

$$s = a + 60t.$$

1) Если $a = 5$ и $t = 0{,}5$, то $s = 5 + 60 \cdot 0{,}5 = 35$ км.

2) Из формулы $s = a + 60t$ находим t: $t = \frac{s-a}{60}$.

Если $s = 70$, $a = 10$, то $t = (70 - 10) : 60 = 1$ ч. ▲

Упражнения

26. Запишите:

1) сумму чисел m и n;

2) разность чисел a и b;

3) удвоенную разность чисел a и b;
4) удвоенное произведение чисел m и n;
5) частное от деления суммы чисел n и m на их разность;
6) произведение суммы чисел a и b на их разность.

27. Какими числами могут выражаться буквы в следующих выражениях:
1) перемена продолжается n минут;
2) в нашем классе y учащихся;

28. Искусственный спутник Земли движется со скоростью 9 км/сек. Заполните следующую таблицу:

Пройденное расстояние, км	45 000	1 350 000
Время движения, сек.		

29. Автомобиль «Спарк» расходует на преодоление 100 км пути a л горючего. Заполните следующую таблицу:

Пройденный путь, км	300	800	1000			
Расход горючего, л						

30. В первом мешке m кг муки, а во втором мешке муки на n кг меньше, чем в первом. Сколько кг муки во втором мешке? Решите задачу, если: 1) $m = 50$ и $n = 12$; 2) $m = 45$ и $n = 15$.

31. Пешеход за 1 ч проходит 5 км. Какой путь он пройдет за 3 часа? За k часов?

32. В магазин привезли a мешков муки по 50 кг в каждом. Сколько килограммов муки привезли в магазин?

33. Бригада трактористов вспахала за 1 день 15 га земли. Сколько гектаров земли вспашет бригада за a дней?

34. Купили 6 тетрадей по x сумов и 3 листа оберточной бумаги по y сумов. Сколько стоила вся покупка?

35. В магазин привезли 15 ящиков слив, по a кг в каждом, и 20 ящиков яблок, по b кг в каждом. Сколько килограммов фруктов привезли в магазин?

36. На машину погрузили k мешков пшеницы, по m кг в каждом, и c мешков овса, по n кг в каждом. Сколько килограммов зерна погрузили на машину?

37. Пришкольный опытный участок имеет форму прямоугольника, длина которого равна a м, а ширина на b м короче. Запишите формулу для площади S этого участка.

38. В кинотеатре m рядов, по n мест в каждом, и еще k откидных мест. Сколько всего мест в кинотеатре? Составьте формулу для решения задачи и выполните вычисления при $m = 30$, $n = 25$, $k = 60$.

39. Сколько времени проводит ученик в школе в тот день, когда у него 5 уроков, две 15-минутных и две 10-минутных перемены? (1 урок — 45 минут)

40. Запишите формулы для вычисления периметров и площадей фигур, размеры которых указаны на рисунке 2.

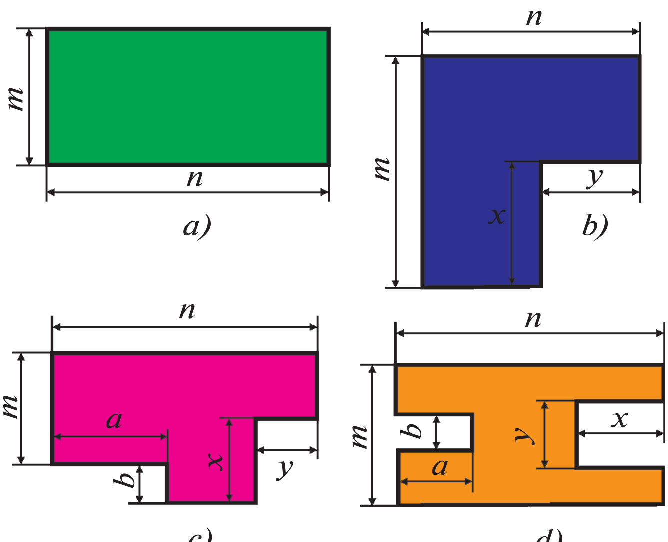


Рис. 2

41. Длина прямоугольника на 8 м длиннее стороны квадрата, а ширина короче стороны квадрата на 4 м. Обозначив сторону квадрата какой-нибудь буквой, запишите для прямоугольника: 1) длины сторон; 2) периметр; 3) площадь.

42. Автобус проходит путь s километров за t часов. С какой скоростью должен ехать автомобиль, чтобы тот же путь пройти на 1 ч быстрее автобуса?

43. Формула $x = 2a + 3b$ (км) дает решение задачи о движении автобуса. Составьте условие задачи.

44. Площадь пришкольного участка равна a м^2. Сад занимает 1500 м^2 площади участка, оставшаяся часть участка разделена на 20 одинаковых площадок. Какова площадь каждой из них?

45. В банк положили 50 000 сумов. Через один год вклад увеличился на p %. Какой стала сумма вклада через один год?

46. Составьте выражение для вычисления площади прямоугольника, основание которого равно a, а периметр 42 дм. Вычислите числовые значения площади (S) прямоугольника в дм^2, воспользовавшись значениями a, приведенными в таблице:

a	5	6	7,5	10	12	12,5	15
S							

№ 1 *Составьте числовое выражение, значение которого равно 100, с помощью только четырех цифр 9 и знаков арифметических действий.*

47. Велосипедист едет со скоростью v км/ч. Ему нужно добраться до села, расположенного в s км от пункта отправления. Сколько ему еще потребуется времени, чтобы приехать в село, если он уже проехал 3 км? Успеет ли он доехать до села за 2,5 ч, если он уже проехал 3 км и $s = 36$, $v = 12$?

48. Один автомобиль расходует в среднем 5 л бензина на 100 км пути, а другой автомобиль — 10 л бензина на 100 км пути. Какой путь пройдет каждый автомобиль, имея в своем баке a л бензина? Какой из автомобилей доберется до Самарканда, если оба автомобиля выехали одновременно из Ташкента в Самарканд, имея в баках $a = 20$ л бензина? (Расстояние от Ташкента до Самарканда 300 км.)

§ 4 Свойства арифметических действий

Для того чтобы успешно изучать алгебру, нужно хорошо знать свойства арифметических действий. Напомним, что арифметическими действиями называют действия сложения, вычитания, умножения и деления. Словесные формулировки свойств действий над числами будем коротко записывать в виде формул. Основные свойства действий обычно называют законами. Используя законы действий, можно обосновать и другие свойства действий.

1. Сложение и умножение.

Напомним законы сложения и умножения.

1. Переместительный:

$$\boxed{a+b=b+a, \quad ab=ba.}$$

2. Сочетательный:

$$\boxed{(a+b)+c=a+(b+c), \quad (ab)c=a(bc).}$$

3. Распределительный:

$$\boxed{a(b+c)=ab+ac.}$$

В этих равенствах a, b, c — любые числа. Например,

$$1{,}2+3{,}5=3{,}5+1{,}2; \quad \frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{2}{7}\right)=\left(-\frac{2}{7}\right)\cdot\frac{3}{4};$$

$$(-8)\cdot(125+7)=(-8)\cdot125+(-8)\cdot7.$$

С помощью законов сложения и умножения можно получить другие свойства этих действий. Например,

$$\boxed{\begin{gathered}a+b+c+d=a+(b+c+d),\ (abc)d=(ab)(cd),\\ (a+b+c)d=ad+bd+cd.\end{gathered}}$$

Задача 1. Вычислить: $75 + 37 + 25 + 13$.

△ Вычисления можно провести, следуя указанному порядку действий: сложить 75 и 37, к результату прибавить 25 и к последнему результату прибавить 13. Однако вычисления можно упростить, если воспользоваться свойствами сложения:

$$75+37+25+13=(75+25)+(37+13)=100+50=150. \ ▲$$

Этот пример показывает, что с помощью свойств действий можно проводить вычисления наиболее простым (рациональным) способом. Свойства действий применяются также для выполнения преобразований алгебраических выражений с целью их упрощения.

Задача 2. Упростить выражение:

$$3(2a+4b)+5(7a+b).$$

△ $$3(2a+4b)+5(7a+b)=3\cdot 2a+3\cdot 4b+5\cdot 7a+5\cdot b=6a+12b+35a+5b=$$

$$=(6a+35a)+(12b+5b)=(6+35)a+(12+5)b=41a+17b. \ ▲$$

В ходе решения этой задачи получилось выражение:

$$6a+12b+35a+5b.$$

В этом выражении слагаемые $6a$ и $35a$ подобны, так как они отличаются друг от друга только коэффициентами. Слагаемые $12b$ и $5b$ также подобны. Поэтому и можно было записать вместо выражения $6a+12b+35a+5b$ выражение $41a+17b$, т. е. привести подобные слагаемые.

Записи преобразований можно делать краткими, выполняя промежуточные вычисления устно. Например,

$$6(3x+4)+2(x+1)=18x+24+2x+2=20x+26.$$

2. Вычитание.

Задача 3. Между городами Ташкент и Самарканд расположен город Джизак. Расстояние между Ташкентом и Самаркандом — 300 км, а между Ташкентом и Джизаком — 180 км. Найти расстояние между Джизаком и Самаркандом.

△ Пусть расстояние между Джизаком и Самаркандом x километров. Тогда $180+x=300$, откуда $x=300-180=120$.

Ответ: 120 км. ▲

Из равенства $180 + x = 300$ число x находится с помощью действия вычитания, которое называют обратным к действию сложения.

Вычитание можно заменить сложением с противоположным числом:

$$\boxed{a - b = a + (-b).}$$

Поэтому свойства вычитания можно обосновать свойствами сложения. Например:

$251 + (49 - 13) = 251 + 49 - 13 = 287,$ $\quad a + (b - c) = a + b - c,$

$123 - (23 + 39) = 123 - 23 - 39 = 61,$ $\quad a - (b + c) = a - b - c,$

$123 - (83 - 77) = 123 - 83 + 77 = 117,$ $\quad a - (b - c) = a - b + c.$

Задача 4. Найти значение выражения:

$$4(3x - 5y) + 6(x - y)$$

при $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{13}$.

△ Сначала упростим данное выражение:

$$4(3x - 5y) + 6(x - y) = 12x - 20y + 6x - 6y = 18x - 26y.$$

При $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{13}$ получаем:

$$18 \cdot \frac{1}{2} - 26 \cdot \frac{1}{13} = 9 - 2 = 7. \ ▲$$

Использование свойств действий позволяет предварительно упростить алгебраическое выражение, а затем вычислить его значение более рациональным способом.

3. Деление.

Задача 5. Площадь прямоугольника равна 380 см^2, одна из его сторон равна 95 см. Найти другую сторону прямоугольника.

△ Из формулы $S = ab$ находим $b = \frac{S}{a}$. Так как $S = 380$, $a = 95$, то $b = \frac{380}{95} = 4$.

Ответ: 4 см. ▲

Из равенства $ab = S$ число b находится с помощью действия деления, которое называют обратным к действию умножения.

Деление можно заменить умножением на число, обратное делителю:

$$\boxed{\frac{a}{b} = a : b = a \cdot \frac{1}{b}.}$$

Поэтому свойства деления можно вывести из свойств умножения.

Задача 6. Доказать равенство

$$\boxed{\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c},}$$

где $c \neq 0$.

Заменяя деление умножением, получаем:

$$\frac{a+b}{c} = (a+b) \cdot \frac{1}{c}.$$

Применяя распределительный закон, находим:

$$(a+b) \cdot \frac{1}{c} = a \cdot \frac{1}{c} + b \cdot \frac{1}{c}$$

Заменяя умножение делением, получаем:

$$a \cdot \frac{1}{c} + b \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$$

Упражнения

49. Найдите значение числового выражения, используя законы и свойства арифметических действий:

1) $29 \cdot 0,45 + 0,45 \cdot 11$;
2) $(51,8 + 44,3 + 48,2 - 24,3) \cdot \frac{1}{3}$;
3) $4,07 - 5,49 + 8,93 - 1,51$;
4) $-11,401 - 23,17 + 4,401 - 10,83$.

50. Приведите подобные слагаемые:

1) $4a+2b+a-b$;
2) $x-2y-3x+5y$;
3) $0{,}1c-0{,}3+d-c-2{,}1d$;
4) $8{,}7-2m+n-\frac{1}{3}m+\frac{2}{3}n$.

51. Приведите подобные слагаемые:

1) $2{,}3a-0{,}7a+3{,}6a-1$;
2) $0{,}48b+3+0{,}52b-3{,}7b$;
3) $\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}x-\frac{1}{6}a-\frac{5}{6}a+2$;
4) $\frac{5}{6}y-\frac{1}{3}b-\frac{1}{6}y+\frac{2}{3}b-3$;
5) $2{,}1m+n-3{,}2n+2m+1{,}1m-n$;
6) $5{,}7p-2{,}7q+0{,}3p+0{,}8q+1{,}9q-p$.

52. Упростите выражение:

1) $3(2x+1)+5(1+3x)$;
2) $4(2+x)-3(1+x)$;
3) $10(n+m)-4(2m+7n)$;
4) $11(5c+d)+3(d+c)$.

53. Упростите выражение и найдите его числовое значение:

1) $5(3x-7)+2(1-x)$ при $x=\frac{1}{26}$;
2) $7(10-x)+3(2x-1)$ при $x=-0{,}048$;
3) $\frac{1}{3}(6x-3)+\frac{2}{5}(5x-15)$, при $x=3{,}01$;
4) $0{,}01(2{,}2x-0{,}1)+0{,}1(x-100)$, при $x=-10$.

54. Используя свойства арифметических действий, вычислите:

1) $\frac{1}{7}(0{,}14+2{,}1-3{,}5)$;
2) $\frac{1}{12}(4{,}8-0{,}24-1{,}2)$;
3) $(18\frac{6}{7}+21\frac{3}{4}):3$;
4) $(15\frac{5}{7}+20\frac{15}{16})\cdot\frac{1}{5}$.

§ 5 Правила раскрытия скобок

1. Алгебраическая сумма.

Задача 1. В 20-этажном здании движется лифт. С восьмого этажа он передвинулся на 6 этажей вниз, затем на 12 этажей вверх, на 4 этажа вниз, на 7 этажей вверх, на 13 этажей вниз. На каком этаже находится лифт?

△ Чтобы найти, на каком этаже находится лифт, нужно вычислить значение числового выражения $8-6+12-4+7-13$. Это значение равно 4. Значит, лифт находится на четвертом этаже. ▲

Из курса математики 6 класса вы знаете, что выражение $8-6+12-4+7-13$ называют *алгебраической суммой*. Такое название объясняется тем, что это выражение можно записать в виде суммы $8+(-6)+12+(-4)+7+(-13)$.

Приведем еще примеры алгебраических сумм:

$$3-(-7)+(-2), \quad a-b+c-d, \quad a+(-b)-(-c).$$

Напомним, что вычесть число $(-c)$ — это значит прибавить число, противоположное числу $(-c)$, т. е. число c. Поэтому последнюю алгебраическую сумму можно записать так:

$$a+(-b)+c.$$

Алгебраическая сумма — это запись, состоящая из нескольких алгебраических выражений, соединенных знаками «+» или «−».

Обычно алгебраические суммы вида $3-(-7)+(-2)$, $a+(-b)-(c)$ записывают короче так:

$$3-(-7)+(-2)=3+7-2; \; a+(-b)-(-c)=a-b+c.$$

В алгебраической сумме $3+7-2$ слагаемыми являются числа 3, 7 и -2, так как $3+7-2=3+7+(-2)$; в алгебраической сумме $a-b+c$ слагаемыми являются a, $-b$, c, так как $a-b+c=a+(-b)+c$.

2. Раскрытие скобок и заключение в скобки.

Рассмотрим выражение $a+(b+c)$. Применяя сочетательный закон сложения, его можно записать так:

$$\boxed{a+(b+c)=a+b+c.}$$

В этом равенстве поменяем c на $-d$:

$$\boxed{a+(b-d)=a+b-d.}$$

Эти равенства лежат в основе преобразований выражений, содержащих скобки, перед которыми стоит знак «+», и позволяют сформулировать *первое правило раскрытия скобок*.

Если к алгебраическому выражению прибавляется алгебраическая сумма, заключенная в скобки, то скобки можно опустить, сохранив знак каждого слагаемого этой алгебраической суммы.

Например:

1) $14+(7-13+2)=14+7-13+2$;

2) $a+(b+c-d)=a+b+c-d$;

3) $(a-b)+c=a-b+c$.

Преобразование выражений, содержащих скобки, перед которыми стоит знак «–», основывается на следующих свойствах вычитания:

$$\boxed{\begin{gathered}-(-a)=a,\ \ -(a+b)=-a-b,\\ a-(b+c)=a-b-c,\\ a-(b-c)=a-b+c.\end{gathered}}$$

Из этих равенств следует *второе правило раскрытия скобок*.

Если из алгебраического выражения вычитается алгебраическая сумма, заключенная в скобки, то скобки можно опустить, изменив знак каждого слагаемого этой алгебраической суммы на противоположный.

Например:

1) $14-(7-13+2)=14-7+13-2$;

2) $a-(b+c-d)=a-b-c+d$;

3) $-(a-b)+c=-a+b+c$.

Задача 2. Раскрыть скобки и упростить:

$$3x+(5-(8x+3)).$$

△ $3x+(5-(8x+3))=3x+5-(8x+3)=3x+5-8x-3=2-5x$. ▲

Иногда полезно заключить несколько слагаемых в скобки. Например:

1) $108-137+37=108-(137-37)=108-100=8;$

2) $\boxed{a+b-c+d=a+(b-c+d).}$

Здесь перед скобками поставлен знак «+», поэтому знаки всех слагаемых, заключенных в скобки, сохраняются.

3) $\boxed{a-b-c+d=a-(b+c-d).}$

Здесь перед скобками поставлен знак «−», поэтому знаки всех слагаемых, заключенных в скобки, изменены на противоположные.

Упражнения

55. Запишите алгебраическую сумму без скобок:

1) $(-4)+(-3)-(+7);$ 3) $(-a)+(-7b)+\frac{1}{3}c;$

2) $(-4)+(-9)-(-11);$ 4) $2a+(-3b)-4c.$

56. Назовите слагаемые алгебраической суммы:

1) $15-c;$ 2) $m-7;$ 3) $-a+47;$ 4) $-13-b.$

57. Запишите алгебраическую сумму в виде суммы:

1) $a-b+c;$ 2) $2+b-c;$ 3) $a-2-b;$ 4) $3+a-b-c.$

Раскройте скобки **(58—59)**:

58. 1) $a+(2b-3c);$ 3) $a-(2b+3c);$

2) $a-(2b-3c);$ 4) $-(a-2b+3c).$

59. 1) $a+(b-(c-d));$ 3) $a-((b-c)-d);$

2) $a-(b-(c-d));$ 4) $a-(b+(c-(d-k))).$

60. Раскройте скобки и упростите:

1) $3a-(a+2b);$ 3) $3m-(5m-(2m-1));$

2) $5x-(2y-3x);$ 4) $4a+(2a-(3a+3)).$

61. Заключите в скобки все слагаемые, начиная с числа m или $(-m)$, поставив перед скобками знак «+»:

1) $a+2b+m-c$;
2) $a-2b+m+c$;
3) $a-m+3c+4d$;
4) $a-m+3b^2-2a^3$.

62. Заключите в скобки все слагаемые, начиная с числа m или $(-m)$, поставив перед скобками знак «−»:

1) $2a+3b+m-c$;
2) $2a+b+m+3c$;
3) $c-m-2a+3b^2$;
4) $a-m+3b^2-2a^3$.

63. Запишите выражение:

1) $a+b-1$ в виде суммы двух слагаемых, первое из которых равно a;
2) $a-b+1$ в виде разности с уменьшаемым a;
3) $2a-b+4$ в виде разности с уменьшаемым $2a$;
4) $a-2b+8$ в виде суммы двух слагаемых, одно из которых равно 8.

64. Левые части равенств одинаковы. Почему же правые части различны?

1) $2400 + 750 : 15 - 40 \cdot 3 = 2330$;
2) $2400 + 750 : 15 - 40 \cdot 3 = 90$;
3) $2400 + 750 : 15 - 40 \cdot 3 = 2430$;
4) $2400 + 750 : 15 - 40 \cdot 3 = 2310$;
5) $2400 + 750 : 15 - 40 \cdot 3 = 7210$;
6) $2400 + 750 : 15 - 40 \cdot 3 = 2407$;
7) $2400 + 750 : 15 - 40 \cdot 3 = 510$.

65. Поставьте вместо многоточий знаки «+» или «−» так, чтобы в результате получилось верное равенство:

1) $a-(b+c)=a+(\ldots b \ldots c)$;
2) $c-(a-b)=c+(\ldots a \ldots b)$;
3) $m-(n-a)=m+(\ldots n \ldots a)$;
4) $n-(d-l)=n+(\ldots d \ldots l)$.

Проверьте себя!

1. Вычислите:

1) $(17{,}2\cdot 4{,}01+4{,}01\cdot 32{,}8):1\frac{2}{3}$;

2) $\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot 2\left(\frac{2}{3}\right)-25\cdot 0{,}03\cdot 4$.

2. Упростите выражение $3(2y-x)-2(y-3x)$ и найдите его числовое значение при

$x=-\frac{2}{9}$, $y=0{,}25$.

3. Для детского дома купили 10 коробок шахмат и 15 мячей. Коробка шахмат стоит *a* сумов, а один мяч — *b* сумов. Написать формулу стоимости всей покупки.

66. Упростите:

1) $(5a-2b)-(3b-5a)$;

2) $(6a-b)-(2a+3b)$;

3) $7x+3y-(-3x+3y)$;

4) $8x-(3x-2y)-5y$.

67. Решите уравнения:

1) $(2x+1)+3x=16$;

2) $(x-4)+(x+6)=4$;

3) $(x-5)-(5-3x)=2$;

4) $23-(x+5)=13$.

68. Найдите числовое значение выражения, предварительно упростив его:

1) $(2c+5d)-(c+4d)$ при $c=0{,}4$, $d=0{,}6$;

2) $(3a-4b)-(2a-3b)$ при $a=0{,}12$, $b=1{,}28$;

3) $(7x+8y)-(5x-2y)$ при $x=-\frac{3}{4}$, $y=0{,}025$;

4) $(5c-6b)-(3c-5b)$ при $c=-0{,}25$, $b=2\frac{1}{2}$.

Упражнения к главе I

Вычислите числовое значение алгебраического выражения **(69–73)**:

69. 1) $a+bc$ при $a=-1,\ b=3,\ c=0;$

2) $a-bc$ при $a=2,\ b=-1,\ c=-3;$

3) $(a+b)c$ при $a=1,\ b=-3,\ c=2;$

4) $(a-b)c$ при $a=3,\ b=1{,}2,\ c=5;$

5) $(a-b)+(c-d)$ при $a=4,\ b=2,\ c=3,\ d=-1;$

6) $(a-b)-(c-d)$ при $a=0,\ b=-4,\ c=-2,\ d=3;$

7) $a-(b-c)$ при $a=0{,}5,\ b=\frac{1}{2},\ c=-1{,}2;$

8) $a-(b-c)-d$ при $a=5{,}2,\ b=1{,}3,\ c=2{,}8,\ d=2{,}8.$

70. 1) $5(x-y)^2;$ 2) $3(x+y)^2;$ 3) $(5x-y)^2;$ 4) $(3x+y)^2.$
при $x=2{,}5,\quad y=4{,}5.$

71. 1) $2((a-b)^2+1);$ 3) $((a-b)a-8):2;$
2) $4(3-(a-b)^2);$ 4) $(5a-(a+b)):3$ при $a=5,\quad b=-1.$

72. 1) $3(a+b)-2ab;$ 3) $3(a-b)+2ab;$
2) $3a+b-2ab;$ 4) $3a-b+2ab$ при $a=1{,}2,\quad b=1{,}8.$

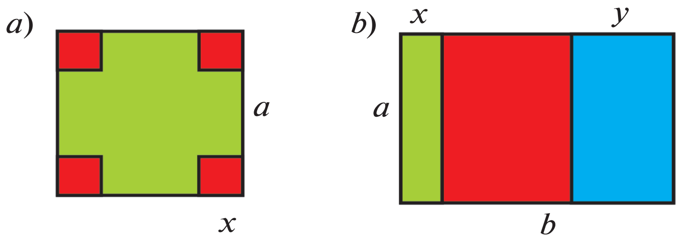
73. 1) $\frac{1}{2}b^3-3c^2$ при $b=-2,\ c=-\frac{1}{3};$

2) $-0{,}75a^2+1\frac{2}{3}b^2$ при $a=-2,\ b=3;$

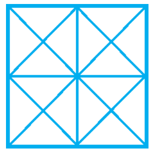
3) $(a^2-26)^2$ при $a=-5;$ 4) $(a^3+26)^3$ при $a=-3.$

74. Определите геометрический смысл выражения
1) $a\cdot b$, где a и b — длины сторон прямоугольника;
2) a^2, где a — длина стороны квадрата;
3) $2(a+b)$, где a и b — длины сторон прямоугольника;
4) $4a$, где a — длина стороны квадрата.

75. 1) a^2-4x^2, где a — длина стороны большого квадрата, x — длина стороны каждого маленького квадрата (рис. 3 *а*);



2) $\dfrac{ab}{ax+ay}$, где a и b длины сторон большого прямоугольника, x и y длины сторон маленьких прямоугольников (рис. 3 *б*).



№2 *Сколько треугольников, квадратов и прямоугольников на этом рисунке?*

76. Один гектар луга способен очистить воздух от 70 т пыли. От скольких тонн пыли очистят воздух 10 га; 100 га; m га? От скольких тонн пыли очистит воздух луг общей площадью 16 000 га?

77. При увеличении скорости движения автомобиля вдвое его тормозной путь увеличивается в 4 раза. Воспользовавшись таблицей, найдите тормозной путь автомобиля, если его скорость увеличилась с 30 км/ч до 60 км/ч (рис. 5):

Для грузовой машины:	
30	9,5

Для легковой машины:	
30	7,25

Рис. 5

78. (*Задача Абу Райхана Беруни.*) Какую прибыль принесут 8 дирхемов за три месяца, если 10 дирхемов за два месяца приносят прибыль 5 дирхемов?

Тестовые задания к главе I

1. Найдите числовое значение выражения $P=2(a+b)$ при $a=5{,}1,\quad b=4{,}7$.

A) 196; B) 19,6; C) 1,96; D) 18,16.

2. Площадь прямоугольника равна *S*, его основание *a*. Составьте выражение для вычисления периметра прямоугольника.

A) $\frac{S}{2a}+a$; B) $\frac{S}{a}+2a$; C) $2\left(\frac{S}{a}+a\right)$; D) $\frac{S}{a}+a$.

3. Периметр равнобедренного треугольника равен *p*, его основание *a*. Составьте выражение для вычисления боковой стороны треугольника.

A) $2a-p$; B) $2p-a$; C) $p-a$; D) $\frac{1}{2}(p-a)$.

4. Найдите числовое значение выражения $V=abc$ при $a=2{,}5,\quad b=2{,}4$ и $c=3{,}5$.

A) 18,3; B) 21; C) 2,1; D) 12,1.

5. Найдите числовое значение выражения $S=2(ab+ac+bc)$ при $a=5,\quad b=6{,}4,\quad c=4{,}5$.

A) 50,45; B) 83,3; C) 166,6; D) 109.

6. Мать купила для своих детей 8 альбомов для рисования по *a* сумов, 5 ручек по *b* сумов и 20 тетрадей по *c* сумов. Составьте выражения для вычисления стоимости всей покупки.

A) $8a+5b+20c$; C) $800abc$;
B) $8a+25(b+c)$; D) $8a+100ba$.

7. Раскройте скобки и преобразуйте: $5a+(3a-(4a+3))$.

A) $8a+3$; B) $4a-3$; C) $-4a-3$; D) $3-4a$.

8. Преобразуйте выражение $0,5\cdot(2a-3b)-(4b+2,5a)$ и найдите его значение при $a=2,4$; $b=1,5$.

A) 17,4; B) −17,4; C) −1,4; D) −11,85.

9. Периметр прямоугольника равен p, основание a. Составьте выражение для вычисления высоты прямоугольника.

A) $\frac{p-2a}{2}$; B) $2-ap$; C) $\frac{2a-p}{2}$; D) $p-2a$.

10. Упростите выражение $3(2a-b)-2(a-2b)$ и найдите его числовое значение при $a=2,7$, $b=4,2$.

A) 24,36; B) 27,6; C) 8,7; D) 15.

11. Длина одной стороны треугольника равна a. Длина второй стороны составляет 80% от длины первой, а длина третьей равна полусумме длин первой и второй сторон. Найдите периметр треугольника.

A) $1,8a$; B) $2,7a$; C) $3a$; D) $3a+0,8$.

12. Найдите числовое значение выражения: $v=\frac{1}{3}\pi h(R^2+$ $+Rr+r^2)$, если $h=6$, $r=2$, $R=4$.

A) 56π; B) 55π; C) 84π; D) 28π.

13. Найдите числовое значение выражения: $S=2\pi R(R+H)$, если $R=4,5$, $H=6,5$.

A) 100π; B) 98π; C) 99π; D) $98,5\pi$.

14. Длина одной из сторон треугольника, равная a, на 2 см меньше другой и на 3 см больше третьей. Составьте выражение для вычисления периметра треугольника.

A) $3a-1$; B) $3a-5$; C) $3a+5$; D) $1-3a$.

Исторические сведения

Труды выдающегося математика и астронома Мухаммада ибн Мусы аль-Хорезми по арифметике («Об индийском счете») и алгебре («Китаб аль-джебр валь-мукабала» — «Книга о восстановлении и противопоставлении») оказали существенное влияние на развитие математики. Они были переведены на многие языки и в течение многих веков служили основным справочником по математике.

Латинский перевод сочинения «Об индийском счете», сделанный в начале XII века, хранится в Кембриджском университете в Англии. Благодаря этому сочинению в Европе была принята десятичная система счисления.

Первый Президент нашей страны И. А. Каримов в своем труде «Высокая духовность — непобедимая сила» писал, что Мухаммад ибн Муса аль-Хорезми внес неоценимый вклад и крепкую основу в развитие точных наук, первым внедрил в научную сферу деятельности алгоритм десятичной системы счисления и основные понятия алгебры.

Экземпляр рукописи трактата аль-Хорезми по алгебре хранится в Бодленской библиотеке Оксфордского университета. Трактат состоит из трех частей: 1) алгебраическая часть; 2) геометрическая часть; 3) часть, посвященная разделу наследства.

В трактате тексты задач и решения переданы словами, не используется никаких обозначений и букв: «... я включил простые и сложные арифметические задачи в свой алгебраический трактат потому, что они необходимы при разделе наследства и имущества, составлении завещания, в юридических вопросах, торговле и во всевозможных контрактах, а также при разделе земельных угодий, прокладывании оросительных каналов, в инженерном деле и тому подобных вещах». Следовательно, ученый написал свое сочинение исходя из повседневных потребностей и нужд.

ГЛАВА II

УРАВНЕНИЯ С ОДНИМ НЕИЗВЕСТНЫМ

§ 6 Уравнение и его корни

Решим следующую задачу.

Задача. Карандаш и линейка стоят вместе 370 сумов. Карандаш дешевле линейки на 90 сумов. Сколько стоит линейка?

△ Пусть линейка стоит x сумов, тогда карандаш стоит $(x-90)$ сумов. По условию задачи $x+(x-90)=370$, откуда $2x-90=370$, $2x=460$, $x=230$.

Ответ: Линейка стоит 230 сумов. ▲

В равенстве $x+(x-90)=370$ буква x обозначает неизвестное число, или, короче, *неизвестное*.

Равенство, содержащее неизвестное число, обозначенное буквой, называется ***уравнением.***

Выражение, стоящее слева от знака равенства, называется ***левой частью уравнения,*** *а выражение, стоящее справа от знака равенства, —* ***правой частью уравнения.***

Каждое слагаемое ***левой*** *или* ***правой части уравнения*** *называется членом уравнения.*

В уравнении $2x-90=370$ левая часть $2x-90$; правая часть 370. При $x=230$ левая часть этого уравнения равна 370, так как $2\cdot230-90=370$; правая часть также равна 370. Итак, при $x=230$ это уравнение обращается в верное равенство $2\cdot230-90=370$.

Число 230 называют *корнем* данного *уравнения*.

Корнем уравнения *называется то значение неизвестного, при котором это уравнение обращается в верное равенство.*

Например, число 1 является корнем уравнения $2x+3=5$, так как $2\cdot 1+3=5$ — верное равенство.

Уравнение может иметь два, три и более корней.

Например, уравнение $(x-1)(x-2)=0$ имеет два корня: 1 и 2, так как при $x=1$ и $x=2$ уравнение превращается в верное равенство.

Уравнение $(x-3)(x+4)(x-5)=0$ имеет три корня: 3, -4 и 5.

Уравнение может иметь бесконечно много корней.

Например, уравнение

$$2(x-1)=2x-2$$

имеет бесконечно много корней: любое значение x является корнем этого уравнения, так как при любом x левая часть уравнения равна правой части.

Уравнение может и не иметь корней.

Например, уравнение $2x+5=2x+3$ не имеет корней, так как при любом значении x левая часть этого уравнения больше правой.

Решить уравнение *— это значит найти все его корни или установить, что их нет.*

В простейших случаях легко подобрать значение x, которое является корнем уравнения. Например, легко увидеть, что корень уравнения $2x+1=3$ — число 1. Однако, это не всегда так.

Например, довольно трудно догадаться, что уравнение

$$\frac{x-6}{5}+\frac{4(x+3)}{2}-1=\frac{x-1}{2}+3x-\frac{7x-1}{10}$$

обращается в верное равенство при $x=7$. Поэтому важно научиться решать уравнения.

Решение многих практических задач сводится к решению уравнений, которое можно преобразовать в уравнение

$$\boxed{ax = b,}$$

где a и b — заданные числа, x — неизвестное. Такое уравнение называют ***линейным уравнением.***

Например, уравнения $3x = 1$, $-2x = 3$, $\frac{3}{5}x = -\frac{1}{2}$ являются линейными.

Упражнения

79. Запишите в виде равенства:
1) число 34 на 18 больше числа x;
2) число 56 в x раз больше числа 14;
3) удвоенная разность чисел x и 3 равна 4;
4) полусумма чисел x и 5 равна их произведению.

80. Какие из чисел 3; -2; 1 являются корнями уравнения:

1) $3x = -6$; 3) $4x - 4 = x + 5$;
2) $x + 3 = 6$; 4) $5x - 8 = 2x + 4$?

81. (*Устно.*) При каких значениях x уравнение обращается в верное равенство:

1) $x + 5 = -6$; 2) $4 - x = -1$; 3) $2x - 1 = 0$; 4) $3x + 2 = 0$?

82. Есть ли среди чисел -1; $\frac{1}{2}$; 1 корень уравнения:

1) $4(x - 1) = 2x - 3$; 3) $3(x + 2) = 4 + 2x$;
2) $7(x + 1) - 6x = 10$; 4) $5(x + 1) - 4x = 4$?

83. Составьте уравнение, корнем которого является число:

1) 5; 2) 3; 3) -6; 4) -4.

84. Подберите число a так, чтобы уравнение $4x - 3 = 2x + a$ имело корень:

1) $x = 1$; 2) $x = -1$; 3) $x = \frac{1}{2}$; 4) $x = 0{,}3$.

§ 7 *Решение уравнений с одним неизвестным*

В книге аль-Хорезми «Китаб аль-джебр валь-мукабала» термин «аль-джебр» переводится как «восполнение», то есть перенос вычитаемых членов уравнения в другую часть в виде прибавляемых членов, а термин «валь-мукабала» — как «противопоставление», то есть сокращение равных членов в обеих частях уравнения.

Это показывает, что решение уравнений с одним неизвестным основано на известных вам свойствах верных равенств.

Напомним эти свойства.

Словесная формулировка	Запись в общем виде	Пример
1. Если к обеим частям верного равенства прибавить одно и то же число или из обеих частей верного равенства вычесть одно и то же число, то получится верное равенство.		$7 = 7$, $7 + 2 = 7 + 2$, $7 - 2 = 7 - 2$.
2. Если обе части верного равенства умножить или разделить на одно и то же не равное нулю число, то получится верное равенство.		$27 = 27$, $27 \cdot 3 = 27 \cdot 3$, $27 : 3 = 27 : 3$.

Из первого свойства следует, что слагаемое можно переносить из одной части равенства в другую, изменив знак этого слагаемого на противоположный.

○ Пусть $a = b + m$. Тогда $a + (-m) = b + m + (-m)$; $a - m = b$. ●

Покажем, как применяются свойства равенств к решению уравнений.

Задача 1. Решить уравнение $9x - 23 = 5x - 11$.

△ Предположим, что x — корень данного уравнения, т. е. — такое число, при котором уравнение обращается в верное равенство. Воспользуемся свойствами верных равенств.

Перенесем член $5x$ со знаком «−» в левую часть, а член −23 перенесем в правую часть равенства со знаком «+».

В результате также получится верное равенство:

$$9x - 5x = 23 - 11.$$

Приведем подобные члены в обеих частях этого равенства, получим:

Разделив обе части последнего равенства на 4, найдем $x = 3$.

Итак, предположив, что уравнение имеет корень x, мы получили $x = 3$.

Таким образом, если данное уравнение имеет корень, то он может быть равен только числу 3.

Проверим, является ли число 3 на самом деле корнем данного уравнения. Подставим $x = 3$ в левую и правую части уравнения и проведем вычисления:

$$9 \cdot 3 - 23 = 4, \quad 5 \cdot 3 - 11 = 4.$$

При $x = 3$ уравнение обратилось в верное равенство:

$$9 \cdot 3 - 23 = 5 \cdot 3 - 11.$$

Следовательно, $x = 3$ — единственный корень данного уравнения. ▲

Подчеркнем, что проверку можно не проводить, так как используемые свойства равенства дают возможность

$-3x$ $5x - 7 = 3x + 11$ $+7$ $5x - 3x = 11 + 7$	**АЛЬ ДЖАБР:** $3x$ переходит влево как $-3x$; − 7 переходит вправо как +7.
$\cancel{4x} - \cancel{5} + 2x = \cancel{4x} + 8 - \cancel{5}$ $2x = 8$	**АЛЬ МУКАБАЛА:** справа и слева зачеркиваются одинаковые члены -5 и $4x$.

переходить от одного верного равенства к другому. При таком способе решения всегда получается правильный результат (разумеется, при условии правильности вычислений).

При записи решения не обязательно приводить подробные объяснения подобно тому, как это было сделано при решении первой задачи.

Например, решение уравнения $5x + 17 = 2x + 5$ можно записать следующим образом:

$$\triangle \quad 5x - 2x = 5 - 17, \quad 3x = -12, \quad x = -4.$$

Ответ: $x = -4$. ▲

Задача 2. Решить уравнение $2(x+3)-3(x+2)=5-4(x+1)$.

△ Упростим левую и правую части уравнения, раскроем скобки и приведем подобные члены. Получим:

$$2x + 6 - 3x - 6 = 5 - 4x - 4, \quad -x = -4x + 1.$$

Следовательно, $3x = 1$, откуда $x = \frac{1}{3}$. ▲

Задача 3. Решить уравнение $\frac{5x}{2} - \frac{x-3}{3} = 1 + \frac{x-5}{6}$.

△ Умножив обе части уравнения на общий знаменатель дробей, т. е. на 6, получим:

$$\frac{5x}{2} \cdot 6 - \frac{x-3}{3} \cdot 6 = 1 \cdot 6 + \frac{x-5}{6} \cdot 6; \qquad 15x - 2(x-3) = 6 + (x-5).$$

Раскроем скобки и приведем подобные члены:

$$15x - 2x + 6 = 6 + x - 5; \qquad 13x + 6 = x + 1,$$

откуда $12x = -5$, $x = -\frac{5}{12}$. ▲

При решении этих задач были использованы следующие *основные свойства уравнений*:

Свойство 1. Любой член уравнения можно перенести из одной части в другую, изменив его знак на противоположный.

Свойство 2. Обе части уравнения можно умножить или разделить на одно и то же число, не равное нулю.

Эти свойства дают возможность решить любое уравнение с одним неизвестным. Для этого:

1) переносят члены, содержащие неизвестное, в левую часть, а члены, не содержащие неизвестное, в правую (свойство 1);

2) приводят подобные члены;

3) делят обе части уравнения на коэффициент при неизвестном, если он не равен нулю (свойство 2).

В рассмотренных примерах каждое уравнение имело один корень. Однако может оказаться, что уравнение с одним неизвестным не имеет корней или любое значение неизвестного является корнем уравнения. Приведем примеры таких уравнений.

Задача 4. Решить уравнение $2(x+1)-1=3-(1-2x)$.

△ Упростим обе части уравнения:

$$2x+2-1=3-1+2x, \quad 2x+1=2+2x,$$

откуда $2x-2x=2-1$, $\quad 0\cdot x=1$.

Это уравнение не имеет корней, так как левая часть $0\cdot x$ равна нулю при любом x, а значит, не равна 1.

Ответ: корней нет. ▲

Задача 5. Показать, что любое значение x является корнем уравнения $3(1-x)+2=5-3x$.

△ Упростим уравнение:

$$3-3x+2=5-3x, \quad 5-3x=5-3x, \quad -3x+3x=5-5, \quad 0\cdot x=0.$$

Последнее равенство является верным при любом значении x. Следовательно, любое значение x является корнем уравнения.

Ответ: любое значение x является корнем уравнения. ▲

Упражнения

Решите уравнение **(85—96)**:

85. 1) $11x=50$; | 2) $-9x=243$; | 3) $4x=0,24$; | 4) $7x=7,063$.

86. 1) $9x=\frac{2}{5}$; | 2) $3x=2\frac{1}{7}$; | 3) $\frac{1}{2}x=3$; | 4) $\frac{3}{4}x=\frac{1}{2}$.

87. 1) $0,3x=6$; | 2) $1,3x=-1,69$; | 3) $0,7x=49$; | 4) $10x=0,5$.

88. 1) $8x=8$; | 2) $\frac{1}{4}x=16$; | 3) $3^2x=243$; | 4) $16x=16$.

89. 1) $5x=\left(\frac{5}{7}\right)^2$; | 2) $4x=-\left(\frac{4}{5}\right)^2$; | 3) $-0,1x=10^3$; | 4) $0,3x=-10^2$.

90. 1) $25x-1=9$;
2) $7x+8=11$;
3) $3x-5=10-x$;
4) $4x+4=x+5$.

91. 1) $5x+3(3x+7)=35$;
2) $8x-(7x+8)=9$;
3) $8y-9-4y+5=12y-4-5y$;
4) $4+8y+8=2y-10-7y+9$.

92. 1) $\frac{11}{7}=\frac{2-x}{5}$; 2) $\frac{3x}{5}=\frac{6+x}{3}$; 3) $\frac{x}{3}+\frac{x}{5}=8$; 4) $\frac{y}{3}+\frac{y}{4}=14$.

93. 1) $3y+5=4\left(9-\frac{y}{2}\right)$;
2) $8\left(11-\frac{3}{4}z\right)=16z-44$;
3) $3\left(5+\frac{x}{2}\right)=4+2x$;
4) $2\left(3-\frac{x}{3}\right)=5+x$.

94. 1) $0,71x+1,98=0,37x-1,76$;
2) $0,18y-7,4=0,05y-5,71$;
3) $5(5x-1)-2,7x+0,2x=6,5-0,5x$;
4) $0,36x-0,6=0,3(0,4x-1,2)$.

95. 1) $11\frac{2}{3}x-5\frac{1}{6}=3\frac{3}{4}+2\frac{3}{4}x$;
2) $12\frac{3}{4}+\frac{3}{7}y=\frac{y}{2}-10\frac{1}{28}$;
3) $\frac{6x+7}{7}=3-\frac{5x-3}{8}$;
4) $10-\frac{3x-1}{2}=\frac{6x+3}{11}$.

96. 1) $\frac{4x-51}{3}-\frac{17-3x}{4}=\frac{x+5}{2}$; 3) $\frac{9x-5}{2}-\frac{3+5x}{3}-\frac{8x-2}{4}=2$;

2) $\frac{3x-7}{4}-\frac{9x+11}{8}=\frac{3-x}{2}$;

4) $\frac{4x-3}{2}-\frac{5-2x}{3}=\frac{3x-4}{3}$.

№ 3 *— Бабушка, сколько лет Вашему внуку?*
— Моему внуку столько же месяцев, сколько мне лет.
— А сколько же Вам лет?
— Если сложить мой возраст и возраст моего внука, то получится 65. Сосчитайте, сколько лет моему внуку?

97. Покажите, что уравнение не имеет корней:

1) $28-20x=2x+25-16x-12-6x$;

2) $25x-17=4x-5-13x+14+34x$;

3) $\frac{x-1}{3}+\frac{5x+2}{12}=\frac{5+3x}{4}$;

4) $\frac{2x+1}{3}-\frac{7x+5}{15}=\frac{x-2}{5}$.

98. Покажите, что любое значение x является корнем уравнения:

1) $10-4x+3=9x-2-6x+9-7x+6$;

2) $9x+4-5x=8+7x-9-3x+5$;

3) $6(1,2x-0,5)-1,3x=5,9x-3$;

4) $8(1,3x+0,25)-6,6x=3,8x+2$.

99. Решите уравнение:

1) $3(x-1)-2(x+2)=4x+8$;

2) $4(x+1,5)+3(1-x)=10$;

3) $4(3x+2)-7(x+1)=3(x-1)$;

4) $2,5(2x+3)-2(x+2,5)=3,5+2x$.

100. Решите уравнение:

1) $\frac{96}{7,2}=\frac{4x+300}{21}$;

2) $\frac{3x+14,7}{20,4}=\frac{7,5}{10}$;

3) $4,2:(2x-7)=10:7\frac{1}{7}$;

4) $4\frac{1}{11}:10=4,5:(3x-1)$.

§ 8 *Решение задач с помощью уравнений*

Применение уравнений позволяет упростить решение многих задач. При этом решение задачи обычно состоит из двух этапов:

1) составление уравнения по условиям задачи;

2) решение полученного уравнения.

Рассмотрим задачу.

Задача. Теплоход с туристами отправился от пристани вниз по течению реки и должен вернуться обратно через 5 ч. Скорость течения реки 3 км/ч, скорость теплохода в стоячей воде 18 км/ч. На какое расстояние туристы отплывут от пристани, если перед возвращением они пробудут на берегу 3 ч?

△ 1) Пусть искомое расстояние x километров. Это расстояние вниз по течению теплоход проходит со скоростью $18+3=21$ км/ч и затрачивает $\frac{x}{21}$ ч. Возвращаться теплоход будет со скоростью $18-3=15$ км/ч и затратит на возвращение $\frac{x}{15}$ ч. На берегу туристы пробудут 3 ч. Следовательно, вся поездка займет $\left(\frac{x}{21}+\frac{x}{15}+3\right)$ ч, что по условию задачи равно 5 ч. Таким образом, мы получили для определения неизвестного расстояния x следующее уравнение:

$$\frac{x}{21}+\frac{x}{15}+3=5.$$

2) Перейдем теперь к решению уравнения $\frac{x}{21}+\frac{x}{15}=2$.

Умножая обе части этого уравнения на 105 (наименьшее общее кратное чисел 21 и 15), получаем: $5x+7x=210$, $12x=210$, откуда $x=17{,}5$.

Ответ: теплоход отплывет от пристани на 17,5 км. ▲

На первом этапе решения задачи (т. е. при составлении уравнения) необходимо было знать, что скорости теплохода и реки при движении по течению складываются, а при движении против течения вычитаются, и что путь, деленный на скорость, есть время движения.

На втором этапе (т. е. при решении полученного уравнения) потребовалось применить изученные в предыдущем параграфе свойства уравнений.

Составить уравнение по условию задачи — это значит перевести задачу на «язык математики», то есть составить математическую модель задачи. Для одной задачи можно построить различные уравнения, различные математические модели.

Упражнения

101. Расстояние между двумя городами A и B 256 км.Из города A в город B вышел товарный поезд со скоростью 66 км/ч. Через 20 минут из города B в A выехал скорый поезд со скоростью 90 км/ч. Через сколько времени после отправления товарного поезда он встретился со скорым?

Для решения этой задачи можно составить следующие уравнения:

а) $66x+90\left(x-\frac{1}{3}\right)=256;$

б) $256-66\cdot\frac{1}{3}=(66+90)\cdot\left(x-\frac{1}{3}\right);$

в) $\frac{x}{66}-\frac{256-x}{90}=\frac{1}{3};$

г) $256-90x=66\cdot\left(x+\frac{1}{3}\right).$

1) Что означает x в каждом из этих уравнений?

2) Какие единицы приравниваются в этих уравнениях?

102. 1) Определенную работу 15 рабочих могут изготовить за 12 дней. На пятый день, после 4 дней работы, присоединились еще 5 рабочих. За сколько дней была выполнена оставшаяся работа?

2) Рабочие обещали выполнить задание за 15 дней. Через 5 дней к ним присоединились еще 6 человек, и оставшееся задание было выполнено за 6 дней. Сколько рабочих было первоначально?
3) 10 человек выполняют определенную работу за 8 дней. Через 2 дня (на третий день) к ним присоединилось еще несколько человек и оставшаяся работа была закончена за 4 дня. Сколько человек пришли на помощь?

103. 1) В трех фирмах работают 624 рабочих. Во второй фирме рабочих в 5 раз больше, чем в первой, а в третьей столько рабочих, сколько в первой и второй вместе. Сколько рабочих работает в каждой из фирм?
2) Три цеха изготовили 792 детали. Второй цех изготовил деталей в 3 раза больше, чем первый, а третий — в 2 раза меньше, чем второй. Сколько деталей изготовил каждый цех отдельно?

104. 1) Периметр равнобедренного треугольника равен 25 см. Найдите длины сторон треугольника, если его боковая сторона на 5 см больше основания.
2) В равнобедренном треугольнике основание составляет $\frac{3}{4}$ боковой стороны. Найдите длины сторон треугольника, если его периметр равен 22 см.

105. 1) Вдоль участка прямоугольной формы, ширина которого 200 м, проложен арык. Его длина 1 км. Найдите длину участка.
2) Участок прямоугольной формы, длина которого в 2 раза больше его ширины, огорожен забором длиной 120 м. Найдите длину и ширину участка.

106. Найдите три последовательных нечетных числа, сумма которых равна 81.

107. Имеются четыре последовательных четных числа. Если из удвоенной суммы крайних вычесть утроенную положительную разность средних чисел, то получится 22. Найдите эти числа.

108. 1) После усовершенствования технологии производства, мастер сократил на 20 % время затрачиваемое на выполнение задания. Как увеличилась производительность труда мастера?

2) В цехе поставили автомат, производительность которого была на 8 деталей в час выше производительности рабочего. После 2 ч работы автомат выполнил шестичасовую норму рабочего. Какова производительность автомата?

3) На сколько процентов сократится время на выполнение плана, если производительность труда мастера увеличится на 20 %?

109. Нужно заменить медный провод длиной 27 м на алюминевый с такой же массой и таким же поперечным сечением. Как вы думаете, какой будет длина алюминиевого провода?

110. Несколько магазинов должны были закупить 175 ящиков яблок, разделив их поровну. Но 2 магазина отказались от заказа. В результате остальные магазины закупили дополнительно по 10 ящиков яблок. Сколько было магазинов?

111. 1) В сосуде имеется несколько литров воды. Если в сосуд долить 3 л воды, то он будет заполнен наполовину. Если же из сосуда вылить 3 л воды, то в нем останется $\frac{1}{8}$ объема сосуда. Сколько литров воды было в сосуде первоначально?

2) Масса сосуда вместе с налитой в нее водой составляет 12 кг. После того, как $\frac{3}{5}$ от объема воды в сосуде потратили на полив цветов, оказалось, что масса сосуда меньше, чем масса воды в нем. Сколько килограммов составляет масса сосуда?

112. 1) На нефтяной базе было 6 340 т бензина. Во второй день база распределила на 423 т бензина больше, чем в первый, а в третий день — на 204 т бензина меньше, чем во второй. После этого на базе осталось 3 196 т бензина. Сколько тонн бензина распределила база в первый день?

2) За 3 дня в магазине продали 110 кг масла. Во второй день продали 37,5 % от того, что продали в первый день, а в 3 день продали столько, сколько за первые два дня. Сколько масла продали в первый день?

113. 1) Бригада должна была выполнить заказ за 10 дней. Ежедневно перевыполняя норму на 27 деталей, бригада за 7 дней работы не только выполнила задание, но еще изготовила дополнительно 54 детали. Сколько деталей в день изготовляла бригада?

2) Заказ по выпуску машин завод должен был выполнить за 15 дней. Но уже за 2 дня до срока завод не только выполнил план, но и выпустил сверх плана еще 6 машин, так как ежедневно выпускал по 2 машины сверх плана. Сколько машин должен был выпустить завод по плану за 15 дней?

Проверьте себя!

1. Есть ли среди чисел 1; 0; –4 корни уравнения $3(x-7)+4=7x-1$?

2. Решите уравнение:

1) $2x-3(x-1)=4+2(x-1)$;

2) $\frac{x}{3}+\frac{x+1}{4}=2$.

3. Торговец 20 % товара продал с 40 % надбавкой. С какой процентной надбавкой должен продать торговец оставшийся товар, чтобы получить 32 % надбавку?

Упражнения к главе II

114. 1) Из винограда по 200 сумов за 1 кг получили сок, который продали по 720 сумов. Из 3 кг винограда получается 1 кг сока. Виноград подешевел на 50 сумов. На сколько нужно снизить цену за 1 кг сока, чтобы производитель получил такую же прибыль?
2) Необходимо получить 20 % сиропа. Определите, сколько воды нужно добавить к 200 г сахара?

115. 1) В сосуде вначале было некоторое количество воды. Если в сосуд добавить a литров воды, то она заполнит $\frac{1}{8}$ объема сосуда. Если же из сосуда вылить a литров воды, то вода заполнит $\frac{3}{20}$. Какая часть объема сосуда была заполнена первоначально?

2) $\frac{1}{5}$ объема сосуда не заполнена водой. Какую часть от объема воды, находящейся в сосуде, нужно долить Ахмаду, чтобы сосуд оказался полным? Помогите Ахмаду.

116. Масса первого и второго искусственных спутников Земли составила 592,4 кг. Первый спутник был легче третьего на 1243,4 кг, второй — на 818,2 кг. Найдите массу каждого из трех первых искусственных спутников Земли.

117. Лодка шла по течению реки 2,4 ч и против течения 3,2 ч. Путь, пройденный лодкой по течению, оказался на 13,2 км длиннее пути, пройденного против течения. Найдите скорость лодки в стоячей воде, если скорость течения реки равна 3,5 км/ч.

118. Расстояние между городами Бустон и Гулистан равно 72 км. Из этих городов одновременно вышли два туриста. Скорость одного из них v км/ч, а скорость второго u км/ч. Найдите расстояни между туристами через 2 часа. Рассмотрите все варианты и сделайте выводы.

№ 4 *Чтобы распилить бревно на 3 части, требуется 12 минут. Сколько минут потребуется, чтобы распилить бревно на 4 части?*

119. $\frac{1}{3}$ часть сосуда заполнена водой. После использования $\frac{1}{4}$ части этой воды, в сосуд долили 45 литров воды. После этого незаполненой осталась $\frac{1}{8}$ часть сосуда. Найдите объем сосуда.

120. К экзамену приготовили 60 вопросов. Каждый правильный ответ оценивается в 5 баллов. За каждые 4 неправильных ответа не защитывают 1 правильный ответ. На сколько вопросов правильно ответил ученик, если он получил 225 баллов?

Тестовые задания к главе II

1. Найдите числовое значение выражения x_0^2+1, если x_0 корень уравнения $\frac{5x-3}{8}=\frac{x}{2}+3+\frac{11-3x}{4}$.

A) 50; B) 10; C) 5; D) 37.

2. Вычислите числовое значение выражения $18 : x_0$, если x_0 корень уравнения $\frac{2x+1}{3}+2=\frac{3x-2}{2}+\frac{x+1}{3}$.

A) 6; B) 7; C) -7; D) $46\frac{2}{7}$.

3. Вычислите числовое значение выражения $2x_0+61$, если x_0 корень уравнения $(x+3):(x-2)=5:3$.

A) -80; B) 70; C) 80; D) 81.

4. Найдите числовое значение выражения $4x_0+11$, если x_0 корень уравнения $4:(2x+5)=2:(3x-2)$.

A) -18; B) -20; C) 19; D) 20.

5. Найдите числовое значение выражения $x_0^2-0{,}5\,x_0$, если x_0 корень уравнения $0{,}8\cdot(1{,}5x-2)-0{,}4x=0{,}3\cdot(6x-5)-2{,}6$.

A) 5; B) 1,25; C) 6,25; D) –5.

6. На трех полках имеется 385 книг. На первой полке на 8 книг больше, чем на второй и на 9 меньше, чем на третьей полке. Сколько книг на каждой полке?

A) 128; 120; 137; B) 127; 119; 139;
C) 127; 122; 136; D) 126; 134; 125.

7. Периметр равнобедренного треугольника равен 51 см. Основание на 6 см длиннее боковой стороны. Найдите отношение боковой стороны треугольника к его основанию.

A) 7 : 5; B) 5 : 7 C) 2 : 3 D) 10 : 7.

8. Периметр равнобедренного треугольника равен 42 см. Боковая сторона треугольника составляет $\frac{2}{3}$ от его основания. На сколько основание этого треугольника длиннее его боковой стороны?

A) 7,5 см; B) 6,5 см; C) 6 см; D) 7 см.

9. Мастер должен был выполнить задание за 8 дней. Однако он изготовлял ежедневно на 6 деталей больше и за 5 дней перевыполнил задание на 12 деталей. Сколько деталей в день должен был изготовлять мастер по плану?

A) 6; B) 4; C) 5; D) 7.

Решите уравнение **(10-11):**

10. $8(x+2)-5x=-2(x+4,5)$.

A) –5; B) 5; C) 6; D) –4,5.

11. $6\cdot(2,3x-1)-3,5x+0,7x=0,5(x-14)$.

A) $-\frac{2}{21}$; B) 10,5; C) $\frac{2}{21}$; D) 7.

12. Одна сторона треугольника на 3 см длиннее другой стороны и на 5 см короче третьей стороны. Во сколько раз самая длинная сторона длиннее самой короткой, если периметр треугольника равен 41 см?

A) 2; B) 1,5; C) 1,3; D) 1,8.

13. В одном рулоне было 75 м атласа, во втором — 120 м. После того, как из второго рулона было продано в 3 раза больше атласа, чем из первого, в первом рулоне осталось в 2 раза больше атласа, чем во втором. Сколько метров атласа было продано из каждого рулона?

A) 24 м; 72 м; B) 30 м; 90 м; C) 15 м; 45 м; D) 33 м; 99 м.

14. Решите уравнение:

$3(x+2)-2(x+3)=7-5(x+1)$.

A) $-\frac{1}{3}$; B) $\frac{1}{3}$; C) -1; D) 2.

Исторические сведения

Правила «аль-джебр» (восполнение) и «аль-мукабала» (противопоставление), которые аль-Хорезми ввел в своем алгебраическом трактате, были рассмотрены в § 7 в качестве основных свойств уравнений.

В алгебре, как пишет аль-Хорезми, рассматриваются три рода чисел. Они являются:

— корнем или вещью (неизвестная величина x в уравнении);

— квадратом (имуществом) (квадрат неизвестного — x^2);

— простым числом (под ним понимается натуральное число).

Аль-Хорезми, рассматривая различные зависимости между тремя величинами, предложил методы решения следующих уравнений:

1) $cx^2=bx$ — квадраты равны корням;
2) $cx^2=a$ — квадраты равны числам;
3) $bx=a$ — корни равны числу;
4) $cx^2+bx=a$ — квадраты и корни равны числу;
5) $cx^2+a=bx$ — квадраты и число равны корням;
6) $bx+a=cx^2$ — корни и число равны квадратам.

Каждое из линейных или квадратных уравнений приводится к одному из этих 6 случаев с помощью методов аль-Хорезми.

ГЛАВА III

ОДНОЧЛЕНЫ И МНОГОЧЛЕНЫ

§ 9 Степень с натуральным показателем

Сложение равных между собой чисел можно заменить умножением:

$$\underbrace{3+3+3+3+3}_{5\text{ раз}}=3\cdot 5 \qquad \underbrace{a+a+a+a+\ldots+a}_{n\text{ раз}}=a\cdot n$$

Произведение одинаковых чисел также можно заменить более краткой записью. Рассмотрим квадрат, длина стороны которого равна 5 единицам (рис. 6). Он содержит $5\cdot 5=25$ единичных квадратов. Куб, длина ребра которого равна 5 единицам (рис. 7), содержит $5\cdot 5\cdot 5=125$ единичных кубов.

Вы знаете, что произведение $5\cdot 5$ обозначают как 5^2 (читается: «пять в квадрате»); произведение $5\cdot 5\cdot 5$ обозначают как 5^3 (читается: «пять в кубе»):

$$5\cdot 5=5^2, \quad 5\cdot 5\cdot 5=5^3.$$

Такие же обозначения вводятся для произведения любого числа одинаковых множителей, например:

$$\underbrace{3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3}_{5\text{ раз}}=3^5, \qquad \underbrace{\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{7}}_{9\text{ раз}}=\left(\frac{1}{7}\right)^9,$$

$$0{,}4=(0{,}4)^1.$$

Вообще, для обозначения произведения n равных между собой множителей пользуются записью a^n:

$$\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\text{ раз}}=a^n.$$

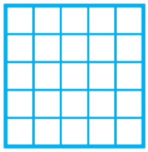


Рис. 6

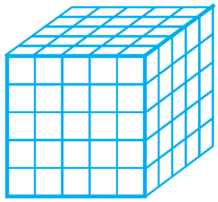


Рис. 7

Выражение a^n читается так: «степень числа a с показателем n» или коротко: «a в степени n».

***Степенью числа** a **с натуральным показателем** n, **большим 1**, называется произведение n множителей, каждый из которых равен a:*

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}}$$

В выражении a^n число a (повторяющийся множитель) называют ***основанием степени***, число n (показывающее, сколько раз повторяется множитель) — ***показателем степени***.

Например,

$$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81,$$

здесь 3 — основание степени, 4 — показатель степени, 81 — значение степени 3^4.

Степенью числа *a* с показателем 1 называется само число a:

$$a^1 = a.$$

Например, $5^1 = 5$; $25^1 = 25$; $\left(\frac{1}{7}\right)^1 = \frac{1}{7}$.

Отметим, что основание степени может быть любым числом, например:

$$2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32; \quad \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{8}{125};$$

$$(-2)^5 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -32;$$

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^4 = \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{16}{81};$$

$$0{,}2^3 = 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2 = 0{,}008;$$

$$(-1)^6=(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)=1;$$
$$0^3=0\cdot0\cdot0=0;\quad 10^4=10\cdot10\cdot10\cdot10=10\,000.$$

Вычисление значения степени называют *возведением в степень*. Это действие третьей ступени. Напомним, что при вычислении значения выражения, не содержащего скобки, сначала выполняют действия третьей ступени, затем второй (умножение и деление) и, наконец, первой (сложение и вычитание).

Задача. Вычислить: $7\cdot2^4-5\cdot3^2$.

$$7\cdot2^4-5\cdot3^2=7\cdot16-5\cdot9=112-45=67.$$

Запись чисел с помощью степени используется во многих случаях, например для записи натуральных чисел в виде суммы разрядных слагаемых:

$$\triangle\ 3245=3\cdot1000+2\cdot100+4\cdot10+5=3\cdot10^3+2\cdot10^2+4\cdot10+5.\ \blacktriangle$$

Для записи больших чисел часто применяются степени числа 10. Так, расстояние от Земли до Солнца, примерно равное 150 млн км, записывают в виде $1{,}5\cdot10^8$ км; радиус земного шара, приближенно равный 6,37 млн м, — в виде $6{,}37\cdot10^6$ м, а расстояние от Земли до ближайшей звезды (альфа Центавра) — в виде $4\cdot10^{13}$ км.

Каждое число, большее 10, можно записать в виде $a\cdot10^n$, где $1\le a<10$ и n — натуральное число. Такая запись называется ***стандартным видом числа****.*

Например, $4578=4{,}578\cdot10^3$, $45{,}78=4{,}578\cdot10$, $103000=1{,}03\cdot10^5$.

С записью чисел в стандартном виде вы будете часто встречаться при изучении физики, химии, при вычислениях на микрокалькуляторе и т. д.

Упражнения

Запишите сумму в виде произведения **(121—122):**

121. 1) $4+4+4+4+4$; 3) $c+c+c$;
2) $6+6+6+6$; 4) $a+a+a+a+a$.

122. 1) $2m+2m+2m$;
2) $17ab+17ab+17ab$;
3) $(c-2d)+(c-2d)$;
4) $(3b-a)+(3b-a)+(3b-a)$;
5) $\underbrace{3+3+\ldots+3}_{21\text{ раз}}$;
6) $\underbrace{5+5+\ldots+5}_{17\text{ раз}}$;
7) $\underbrace{m+m+\ldots+m}_{n\text{ раз}}$;
8) $\underbrace{b+b+\ldots+b}_{k\text{ раз}}$.

Запишите произведение в виде степени **(123—125):**

123. 1) $2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2$; 2) $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}$; 3) $\left(\frac{3}{4}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)$;
4) $(-2,7)\cdot(-2,7)\cdot(-2,7)\cdot(-2,7)$.

124. 1) $x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x$;
2) $m\cdot m\cdot m\cdot m\cdot m$;
3) $(2a)\cdot(2a)\cdot(2a)$;
4) $(-3b)\cdot(-3b)\cdot(-3b)\cdot(-3b)$.

125. 1) $(x-y)\cdot(x-y)\cdot(x-y)$;
2) $(a+b)\cdot(a+b)$;
3) $\frac{3x}{2}\cdot\frac{3x}{2}$;
4) $\frac{m}{n}\cdot\frac{m}{n}\cdot\frac{m}{n}\cdot\frac{m}{n}\cdot\frac{m}{n}$.

Упростите выражение, используя запись произведения в виде степени**(126—128):**

126. 1) $2\cdot2\cdot2\cdot15$;
2) $4\cdot4\cdot4\cdot4\cdot21$;
3) $5\cdot5\cdot8\cdot8\cdot8\cdot2\cdot2$;
4) $6\cdot6\cdot7\cdot7\cdot3\cdot3\cdot3$.

127. 1) $1,2\cdot1,2\cdot2\cdot2\cdot5\cdot5$;
2) $0,5\cdot0,5\cdot0,5\cdot2\cdot2\cdot4\cdot4$;
3) $0,3\cdot0,3\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{7}$;
4) $\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot2,3\cdot2,3$.

128. 1) $9\cdot9\cdot9\cdot a\cdot a\cdot a$;
2) $x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot3\cdot3$;
3) $\frac{x}{y}\cdot\frac{x}{y}\cdot\frac{x}{y}(x-y)\cdot(x-y)$;
4) $\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot(8a-b)\cdot(8a-b)\cdot(8a-b)$.

Упростите выражение **(129−130):**

129. 1) $p\cdot p\cdot p\cdot p+q\cdot q$;
2) $a\cdot a+b\cdot b\cdot b\cdot b$;
3) $a\cdot a+a\cdot a+a\cdot a$;
4) $x\cdot x\cdot x+x\cdot x\cdot x$.

130. 1) $\underbrace{c \cdot c + c \cdot c + \ldots + c \cdot c}_{k \text{ раз}}$;

3) $\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}} + \underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{m \text{ раз}}$;

2) $\underbrace{a \cdot a \cdot a + a \cdot a \cdot a + \ldots + a \cdot a \cdot a}_{n \text{ раз}}$;

4) $\underbrace{5 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 5}_{k \text{ раз}} + \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{17 \text{ раз}}$.

131. Прочтите выражение, назовите основание степени, показатель степени:

1) 3^2;
3) $\left(-\frac{2}{9}\right)^{41}$;
5) $(4m+n)^{15}$;

2) $\left(1\frac{3}{8}\right)^3$;
4) $(-1,2)^{39}$;
6) $\left(\frac{2a}{3b}\right)^7$.

Вычислите **(132—139)**:

132. 1) 2^3; 2) 3^2; 3) 4^4; 4) 5^3.

133. 1) 1^5; 2) $(-1)^7$; 3) 0^{15}; 4) 0^5.

134. 1) $\left(\frac{2}{3}\right)^3$; 2) $\left(\frac{3}{5}\right)^2$; 3) $\left(1\frac{2}{7}\right)^2$; 4) $\left(2\frac{1}{3}\right)^3$.

135. 1) $(2,5)^2$; 2) $(1,7)^2$; 3) $(-0,2)^3$; 4) $(-0,2)^4$.

136. 1) $(-5)^3$; 2) -5^3; 3) $\left(-2\frac{1}{4}\right)^2$; 4) $-\left(2\frac{1}{4}\right)^2$.

137. 1) $\frac{(-0,2)^4}{(0,1)^5}$; 2) $\frac{(0,3)^3}{(-0,1)^4}$; 3) $\frac{(3,2)^2}{(1,6)^2}$; 4) $\frac{(2,6)^2}{(1,3)^2}$.

138. 1) $2 \cdot (-3)^2$; 2) $-5 \cdot (-2)^3$; 3) $-\frac{1}{2} \cdot (-4)^2$; 4) $-\frac{2}{3} \cdot (-3)^2$.

139. 1) $(-5)^2 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right)$;
2) $(-3)^3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)$;

3) $-(-3)^2 \cdot 2^3$;
4) $-(-3)^2 \cdot (-2)^3$.

140. Найдите значение выражения $-x^2; (-x)^2; (-x)^3$ при $x = 1\frac{1}{2}$; -5.

141. Вычислите значение выражения x^2 для значений x, приведенных в таблице:

x	0	1	–1	2	–2	3	–3	4	–4	5	–5	6	–6
x^2													

142. Вычислите значение выражения x^3 для значений x, приведенных в таблице:

x	0	1	–1	2	–2	3	–3	4	–4	5	–5	6	–6
x^3													

143. Какие из следующих высказываний истинны, а какие ложны? Объясните причину. Если высказывание ложно, то приведите пример, демонстрирующий это:
1) если квадраты двух чисел равны, то и сами числа равны;
2) если кубы двух чисел равны, то и сами числа равны;
3) если к отрицательному числу прибавить его квадрат, то полученное число положительно;
4) если из отрицательного числа вычесть его квадрат, то полученное число отрицательно;
5) если из положительного числа вычесть его квадрат, то полученное число положительно.

Какие из следующих высказываний истинны, а какие ложны? Объясните причину. Приведите соответствующие примеры **(144–145):**

144. 1) Квадрат натурального числа может оканчиваться любой цифрой;
2) Куб натурального числа может оканчиваться любой цифрой.

145. 1) Четвертая степень натурального числа может оканчиваться только цифрами 0; 1; 5; 6;
2) пятая степень натурального числа может оканчиваться той цифрой, которой оканчивается само число.

§ 10 Свойства степени с натуральным показателем

Возведение в степень обладает несколькими важными свойствами.

Свойство 1

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

При умножении степеней с одинаковыми основаниями основание остается прежним, а показатели степеней складываются.

○ По определению степени с натуральным показателем

$2^2 \cdot 2^3 = \underbrace{(2 \cdot 2)}_{2\text{ раза}} \cdot \underbrace{(2 \cdot 2 \cdot 2)}_{3\text{ раза}} =$	$a^m \cdot a^n = \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{m\text{ раз}} \times \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n\text{ раз}} =$

по сочетательному закону умножения

$= \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{5\text{ раз}} =$	$= \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{(m+n)\text{ раз}} =$

по определению степени с натуральным показателем

$= 2^5.$	$= a^{m+n}.$

Итак,

$2^2 \cdot 2^3 = 2^{2+3}.$	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$ ●

Свойство 2

$$a^m : a^n = a^{m-n},\ m > n,\ a \neq 0.$$

При делении степеней с одинаковыми основаниями основание остается прежним, а показатели степеней вычитаются.

○ По условию

$5 > 3.$	$m > n,\ a \neq 0.$

По первому свойству степени

$2^{5-3} \cdot 2^3 = 2^5.$	$a^{m-n} \cdot a^n = a^m,$

по определению деления

$2^{5-3} = 2^5 : 2^3.$	$a^{m-n} = a^m : a^n.$

Итак,

$2^5 : 2^3 = 2^{5-3}$. | $a^m : a^n = a^{m-n}$, $m > n$, $a \neq 0$.

Подчеркнем, что по определению при $m = n$ $\frac{a^n}{a^n} = 1$, $a \neq 0$.

Свойство 3

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

При возведении степени в степень основание остается прежним, а показатели степеней перемножаются.

По определению степени с натуральным показателем

$(2^3)^2 = 2^3 \cdot 2^3 =$ | $(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot a^m \cdot \ldots \cdot a^m}_{n \text{ раз}} =$

по первому свойству степени

$= 2^{3+3} =$ | $= a^{\overbrace{m+m+\ldots+m}^{n \text{ раз}}} =$

по определению умножения

$= 2^{3 \cdot 2}$. | $= a^{mn}$.

Итак,

$(2^3)^2 = 2^{3 \cdot 2}$. | $(a^m)^n = a^{mn}$.

Свойство 4

$$(ab)^n = a^n b^n.$$

При возведении в степень произведения в эту степень возводится каждый множитель.

По определению степени с натуральным показателем

$(2 \cdot 3)^3 = \underbrace{(2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3)}_{3 \text{ раза}} =$ | $(ab)^n = \underbrace{(ab)(ab)\ldots(ab)}_{n \text{ раз}} =$

по сочетательному и переместительному законам умножения

$= \underbrace{(2 \cdot 2 \cdot 2)}_{3 \text{ раза}} \cdot \underbrace{(3 \cdot 3 \cdot 3)}_{3 \text{ раза}} =$ | $= \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n \text{ раз}} \underbrace{(b \cdot b \cdot \ldots \cdot b)}_{n \text{ раз}} =$

по определению степени с натуральным показателем

$= 2^3 \cdot 3^3$. | $= a^n \cdot b^n$.

Итак,

$(2 \cdot 3)^3 = 2^3 \cdot 3^3$. | $(ab)^n = a^n b^n$.

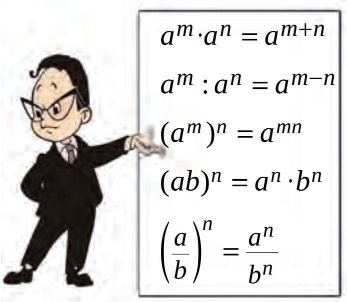
Свойство 5

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}; \quad b \neq 0.$$

При возведении в степень дроби в эту степень возводятся числитель и знаменатель.

○ По определению степени с натуральным показателем

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \underbrace{\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\right)}_{3\ \text{раза}} = \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\dots\frac{a}{b}\right)}_{n\ \text{раз}} =$$



по правилу умножения дробей

$$= \frac{\overbrace{2\cdot 2\cdot 2}^{3\ \text{раза}}}{\underbrace{3\cdot 3\cdot 3}_{3\ \text{раза}}} = \qquad \Bigg| \qquad = \frac{\overbrace{a\cdot a\dots\cdot a}^{n\ \text{раз}}}{\underbrace{b\cdot b\dots\cdot b}_{n\ \text{раз}}} =$$

по определению степени с натуральным показателем

$$= \frac{2^3}{3^3}. \qquad \Bigg| \qquad = \frac{a^n}{b^n}.$$

Итак,

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3}. \qquad \Bigg| \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n},\ b \neq 0. \quad ●$$

Задача 1. Вычислить: $\frac{11^7\cdot 7^3\cdot 3^4}{11^6\cdot 7\cdot 3^4}$.

$$\triangle\ \frac{11^7\cdot 7^3\cdot 3^4}{11^6\cdot 7\cdot 3^4} = 11^{7-6}\cdot 7^{3-1}\cdot 1 = 11\cdot 49 = 539.\ \blacktriangle$$

Задача 2. Скорость света равна $3\cdot 10^8$ м/с, расстояние от Солнца до Земли равно $1{,}5\cdot 10^{11}$ м. За какое время луч света пройдет расстояние от Солнца до Земли?

△ По формуле пути при равномерном движении $s = \upsilon t$ получаем:

$$1{,}5\cdot 10^{11} = 3\cdot 10^8\cdot t,$$

откуда $t = \frac{1{,}5\cdot 10^{11}}{3\cdot 10^8} = 0{,}5\cdot 10^3 = 500$.

Ответ: 500 с = 8 мин 20 с. ▲

Запишите произведение в виде степени **(146—152):**

146. 1) $3^5 \cdot 3^4$; 2) $7^2 \cdot 7^4$; 3) $6^3 \cdot 6$; 4) $5 \cdot 5^5$.

147. 1) $c^3 c^2$; 2) $a^3 a^4$; 3) $\left(\frac{1}{2}a\right)^7 \left(\frac{1}{2}a\right)$; 4) $(3b)(3b)^6$.

148. 1) $(-2)^2 \cdot (-2)^3$; 3) $(-0,5)^4 \cdot (-0,5)^2$;
2) $(-3)^2 \cdot (-3)^2$; 4) $(-1,2)^3 \cdot (-1,2)^4$.

149. 1) $2^3 \cdot 2^2 \cdot 2^4$; 3) $(-5)^6 \cdot (-5)^3 \cdot (-5)^4$;
2) $3^2 \cdot 3^5 \cdot 3^3$; 4) $(-6)^3 \cdot (-6)^2 \cdot (-6)^7$.

150. 1) $(1,3)^2 \cdot (1,3) \cdot (1,3)^5$; 3) $y^4 y^3 y^7$;
2) $\left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4$; 4) $b^6 b^8 b$.

151. 1) $(-2,5a)^3(-2,5a)^8$; 3) $(x-a)^7(x-a)^{10}$;
2) $\left(-\frac{5x}{6}\right)^5 \left(-\frac{5x}{6}\right)^7$; 4) $(n+m)^{15}(n+m)^5$.

152. 1) $4^4 \cdot 4^5$; 2) $3^8 \cdot 3^n$;
3) $c^{28} c^n$; 4) $a^n a^{13}$ (n — натуральное число).

153. Запишите степень в виде произведения двух степеней с одинаковыми основаниями:

1) 3^4; 2) $\left(\frac{5}{9}\right)^5$; 3) y^3; 4) c^{10}; 5) $(-x)^{17}$; 6) $(-11b)^{43}$.

Запишите в виде степени с основанием 2 **(154—157):**

154. 1) 32; 2) 4; 3) 2; 4) 128.

155. 1) 16; 2) 64; 3) 256; 4) 1024.

156. 1) $2 \cdot 2^6$; 2) $2^4 \cdot 2^3 \cdot 2^7$; 3) $8 \cdot 2^7$; 4) $16 \cdot 2^5$.

157. 1) $2^7 \cdot 128$; 3) $2^n \cdot 8$;
2) $2^{10} \cdot 32 \cdot 256$; 4) $16 \cdot 2^n$ (n — натуральное число).

Запишите в виде степени с основанием 3 **(158—161):**

158. 1) 9; 2) 3; 3) 27; 4) 81.

159. 1) 729; 2) 243; 3) $3 \cdot 3^4$; 4) $3^6 \cdot 3$.

№ 5 *Чему равна последняя цифра числа:*
1) 846^{847}; 2) 1987^{1987}; 3) 1998^{1998}; 4) 2009^{2009} ?

160. 1) $3^5 \cdot 3^{17} \cdot 3$; 2) $3^2 \cdot 3^{11} \cdot 3^5$; 3) $3^5 \cdot 27$; 4) $81 \cdot 3^2$.

161. 1) $3^n \cdot 3^2$; 3) $3^{n+1} \cdot 81$;
2) $3 \cdot 3^n$; 4) $27 \cdot 3^n$ (n — натуральное число).

Запишите частное в виде степени **(162—164):**

162. 1) $7^{10} : 7^8$; 2) $4^3 : 4$; 3) $(0{,}2)^4 : (0{,}2)^3$; 4) $10^{12} : 10^4$.

163. 1) $\left(-\frac{9}{7}\right)^8 : \left(-\frac{9}{7}\right)^5$; 2) $\left(\frac{1}{17}\right)^{18} : \left(\frac{1}{17}\right)^{17}$; 3) $x^{21} : x^7$; 4) $d^{24} : d^{12}$.

164. 1) $\left(\frac{3y}{4}\right)^6 : \left(\frac{3y}{4}\right)^2$; 3) $(a-b)^7 : (a-b)^5$;
2) $(2a)^5 : (2a)^3$; 4) $(m+n)^{10} : (m+n)^5$.

Запишите в виде степени с основанием 2 **(165—166):**

165. 1) $2^3 : 2$; 2) $2^4 : 4$; 3) $64 : 4$; 4) $32 : 2^3$.

166. 1) $8 : 2^2$; 2) $256 : 32$; 3) $\frac{2^7}{2^5}$; 4) $\frac{2^{10}}{2}$.

Запишите в виде степени с основанием 3 **(167—168):**

167. 1) $3^5 : 3^2$; 2) $3^4 : 3$; 3) $3^4 : 9$; 4) $27 : 3^2$.

168. 1) $243 : 27$; 2) $81 : 9$; 3) $\frac{3^{15}}{3}$; 4) $\frac{3^8}{3^4}$.

Вычислите **(169—171):**

169. 1) $\frac{2 \cdot 3^3}{3^2}$; 2) $\frac{2^4 \cdot 3^2}{2^3 \cdot 3}$; 3) $\frac{3^5 \cdot 3^{10}}{3^6 \cdot 3^7}$; 4) $\frac{5^8 \cdot 5^7}{5^4 \cdot 5^9}$.

170. 1) $\frac{8\cdot 3^3}{2\cdot 3^2}$; 2) $\frac{11^3\cdot 4^2}{11^2\cdot 4}$; 3) $\frac{2^4\cdot 2^6\cdot 2^3}{2^5\cdot 2^7}$; 4) $\frac{3^6\cdot 3^3}{3^5\cdot 3\cdot 3}$.

171. 1) $\frac{(-5)^9}{5^7}$; 2) $\frac{6^8}{(-6)^7}$; 3) $\frac{6^6}{3^4\cdot 2^3}$; 4) $\frac{3^6\cdot 2^7}{6^5}$.

Решите уравнение **(172—174):**

172. 1) $x : 3^2 = 3^3$; | 2) $x : 2^4 = 2^2$; | 3) $x\cdot 2^6 = 2^8$; | 4) $x\cdot 3^5 = 3^8$.

173. 1) $5^5x = 5^7$; | 2) $4^6x = 4^8$; | 3) $3^8 : x = 3^8$; | 4) $2^{11} : x = 2^9$.

174. 1) $\frac{x}{2^3} = 2^2$; 2) $\frac{x}{3^2} = 3^3$; 3) $\frac{2^8}{x} = 2^5$; 4) $\frac{3^9}{x} = 3^7$.

Запишите в виде степени с основанием a **(175—177):**

175. 1) $(a^5)^6$; 2) $(a^8)^7$; 3) $(a^2)^5a^8$; 4) $a^5(a^2)^8$.

176. 1) $a^7\ a^5\ (a^2)^4$; | 2) $a^3\ (a^3)^3\ a^3$; | 3) $(a^3)^2\ a^4\ (a^4)^3$; | 4) $a^5\ (a^3)^4\ (a^2)^3$.

177. 1) $(a^7)^5 : (a^3)^4$; 2) $(a^6)^4 : (a^3)^5$; 3) $\frac{(a^3)^5a^4}{a^{12}}$; 4) $\frac{a^8(a^4)^4}{(a^3)^4}$.

178. При каком значении n верно равенство:

1) $3^n = 9$; 2) $128 = 2^n$; 3) $(2^2)^n = 16$; 4) $(3^n)^2 = 81$?

Запишите в виде степени с показателем 2 **(179—181):**

179. 1) 0,01; 2) $\frac{25}{36}$; 3) $1\frac{9}{16}$; 4) 0,0004.

180. 1) 5^4; 2) 7^6; 3) $(-0,7)^{14}$; 4) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{24}$.

181. 1) a^4; 2) b^6; 3) c^{10}; 4) x^{20}.

Возведите в степень произведение **(182—187):**

182. 1) $(3\cdot 5)^4$; 2) $(7\cdot 6)^5$; 3) $(1,3\cdot 8)^5$; 4) $\left(4\cdot\frac{1}{7}\right)^3$.

183. 1) $(2a)^3$; 2) $(3x)^4$; 3) $(-4x)^5$; 4) $(-8b)^2$.

184. 1) $(ax)^7$; 2) $(6y)^6$; 3) $(2,5cd)^2$; 4) $(3nm)^3$.

185. 1) $(abc)^4$; 2) $(xyz)^7$; 3) $(3\cdot 5\cdot 11)^8$; 4) $(2\cdot 4\cdot 9)^9$.

186. 1) $(xy^3)^2$; 2) $(a^2b)^3$; 3) $(2b^4)^5$; 4) $(0{,}1c^3)^2$.

187. 1) $(10n^2m^3)^3$; 2) $(8a^4b^7)^3$; 3) $(-2{,}3a^3b^4)^2$; 4) $(-2nm^3)^4$.

Запишите произведение в виде степени по образцу $3^2b^2=(3b)^2$ **(188—190):**

188. 1) 4^5x^5; 2) 2^3a^3; 3) 5^47^4; 4) 2^53^5.

189. 1) $\left(\frac{2}{5}\right)^2a^2$; 2) $(3{,}4)^4b^4$; 3) $(-1{,}2)^3y^3$; 4) $\left(-\frac{2}{3}\right)^2a^2$.

190. 1) $16a^2$; 2) $81r^2$; 3) $9^7n^7m^7$; 4) $15^3a^3b^3$.

Запишите выражение в виде степени с показателем 2 **(191—193):**

191. 1) c^2d^{10}; 2) a^4b^6; 3) $25a^4$; 4) $81m^2$.

192. 1) $a^4b^6c^2$; 2) $x^2y^4z^8$; 3) $49x^8y^6$; 4) $100c^8x^6$.

193. 1) $0{,}25a^{10}b^6$; 2) $0{,}49n^2m^{10}$; 3) $\frac{49}{81}x^{12}y^{14}$; 4) $\frac{16}{625}a^{10}b^{16}$.

Запишите выражение в виде степени с показателем 3 **(194—197):**

194. 1) a^6; 2) b^9; 3) 5^{15}; 4) 4^6.

195. 1) $(-0{,}2)^{12}$; 2) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{15}$; 3) $-0{,}125$; 4) $-0{,}001$.

196. 1) x^3y^9; 2) a^6b^3; 3) $b^9c^{12}d^3$; 4) $x^{12}y^9z^6$.

197. 1) $-27a^3$; 2) $-1000b^6$; 3) $-125n^6m^6$; 4) $-0{,}008x^3y^9$.

Вычислите **(198—202)**:

198. 1) $(0{,}25)^74^7$; 2) $\left(\frac{4}{5}\right)^{17}\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^{17}$;

3) $(-0{,}125)^{11}8^{11}$; 4) $(-0{,}2)^55^5$.

199. 1) $(-0{,}25)^9(-4)^9$; 3) $\left(\frac{6}{11}\right)^3\cdot(8{,}5)^3$;

2) $\left(-\frac{2}{7}\right)^7\cdot(-3{,}5)^7$; 4) $\left(\frac{1}{9}\right)^5\cdot(4{,}5)^5$.

200. 1) $\dfrac{2^8 \cdot 3^8}{6^5}$; 2) $\dfrac{4^5 \cdot 3^5}{12^3}$; 3) $\dfrac{10^5}{2^5 \cdot 5^5}$; 4) $\dfrac{14^4}{2^3 \cdot 7^3}$.

201. 1) $\dfrac{6^{12} \cdot 4^{12}}{3^{12} \cdot 8^{12}}$; 2) $\dfrac{4^{10} \cdot 3^{10}}{2^{10} \cdot 6^{10}}$; 3) $\dfrac{15^4}{3^4 \cdot 5^2 \cdot 25}$; 4) $\dfrac{4^{16}}{8^{10}}$.

202. 1) $\dfrac{8 \cdot 27^3}{3^8}$; 2) $\dfrac{2^8 \cdot (7^2)^4}{14^7}$; 3) $\dfrac{16^2 \cdot 3^5}{12^4}$; 4) $\dfrac{2^9 \cdot (2^2)^5}{(2^5)^3}$.

Возведите степень в дробь **(203—206):**

203. 1) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^2$; 2) $\left(\dfrac{5}{7}\right)^2$; 3) $\left(\dfrac{3}{a}\right)^2$; 4) $\left(\dfrac{b}{8}\right)^3$.

204. 1) $\left(-\dfrac{m}{11}\right)^2$; 2) $\left(-\dfrac{13}{n}\right)^2$; 3) $\left(\dfrac{d}{-2}\right)^3$; 4) $\left(\dfrac{-4}{c}\right)^3$.

205. 1) $\left(\dfrac{a}{2b}\right)^4$; 2) $\left(\dfrac{3b}{5c}\right)^4$; 3) $\left(\dfrac{2^3}{3^2}\right)^7$; 4) $\left(\dfrac{5^2}{7^4}\right)^3$.

206. 1) $\left(\dfrac{a+b}{3}\right)^3$; 2) $\left(\dfrac{7}{2+c}\right)^2$; 3) $\left(\dfrac{m+n}{m-n}\right)^5$; 4) $\left(\dfrac{a+b}{a-b}\right)^7$.

Запишите дробь в виде степени **(207—209)**:

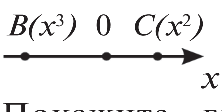
207. 1) $\dfrac{3^7}{4^7}$; 2) $\dfrac{2^5}{5^5}$; 3) $\dfrac{m^3}{2^3}$; 4) $\dfrac{5^7}{a^7}$.

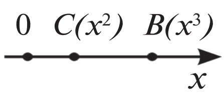
208. 1) $\dfrac{x^6}{y^6}$; 2) $\dfrac{a^3}{b^3}$; 3) $\dfrac{25}{36}$; 4) $\dfrac{49}{100}$.

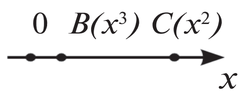
209. 1) $\dfrac{(2b)^2}{(3b)^2}$; 2) $\dfrac{(4x)^4}{(3y)^4}$; 3) $\dfrac{1}{-8}$; 4) $\dfrac{-1}{27}$.

Вычислите **(210—211):**

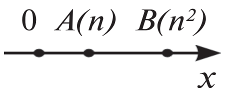
210. Покажите, где на координатном луче расположена точка $A(x)$:

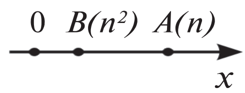
a) 

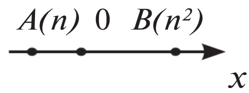
b) 

c) 

211. Покажите, где на координатном луче расположена точка $C(n^3)$:

a) 

b) 

c) 

212. 1) Масса Земли равна $6 \cdot 10^{24}$ кг; масса Солнца — $2 \cdot 10^{30}$ кг. Во сколько раз масса Земли меньше массы Солнца?
2) Расстояние от Земли до звезды Сириус 83 000 000 000 000 км. Вычислите приближенно, за сколько лет доходит луч света от Сириуса до Земли. (Скорость света 300 000 км/с.)

213. Найдите значение выражения:

1) $\dfrac{2-b^2}{2b}$ при $b=-2$; 2) $\dfrac{3a}{a^3-3}$ при $a=-3$.

214*. Запишите выражение в виде степени (n — натуральное число):

1) $5^{3n+4} \cdot 5^{2n-1} : 5^{n+2}$; 3) $\dfrac{a^{6n-4}a^{4n+1}}{a^{5n-2}}$;

2) $3^{4n+3} \cdot 3^{3n-2} : 3^{2n-1}$; 4) $\dfrac{b^{5n-3}b^{3n+2}}{b^{4n-1}}$.

215. При каком значении n верно равенство:

1) $(4^4)^n = 4^{12}$; 2) $(5^n)^2 = 5^{14}$; 3) $2^{2n} = 4^5$; 4) $3(3^2)^n = 3^{11}$?

216. Возведите в степень произведение:

1) $(8a^2b^4c^3)^3$; 2) $(9x^4y^3z^7)^2$;
3) $(-1{,}2x^5y^7z^7)^2$; 4) $(-1{,}2a^3b^2c^4)^5$.

217. Запишите выражение в виде степени с основанием a:

1) $\dfrac{a^8a^5}{a^3a^6}$; 2) $\dfrac{a^9a^6}{a^5a^8}$; 3) $\dfrac{(a^3)^4(a^4)^3}{a^6a^9}$; 4) $\dfrac{a^6(a^3)^5}{(a^4)^2a^9}$.

218. Какое из чисел больше:

1) 54^4 или 21^{12}; 3) 100^{20} или 9000^{10};
2) 10^{20} или 20^{10}; 4) 6^{20} или 3^{40}?

219. Получите верное равенство. Сколько решений имеет задача

1) $(\dots)^2 \cdot (\dots)^3 = -4a^8b^9c^{11}$; 2) $(\dots)^2 \cdot (\dots)^3 = -8a^{11}b^5c^7$?

220. Решите уравнение:

1) $x : 1{,}75 = 7{,}125 - 3\frac{1}{8}$; 3) $18{,}9 : x = 0{,}021 \cdot 100$;

2) $\frac{5}{12} + \frac{1}{18} = \frac{17}{12}x$; 4) $754{,}5 : (37{,}1 + x) = 15$.

221. Запишите в стандартном виде число:

1) 26 000; 2) 8 647 000; 3) 384 000

4) расстояние от Земли до Солнца 149 500 000 км.

§ 11 *Одночлен и его стандартный вид*

При решении различных задач часто встречаются алгебраические выражения вида ab, $\frac{1}{2}abc$, $3a^2b$. Например, вместимость рефрижератора, размеры которого указаны на рис. 8, равна $3abc$.

Выражение $3abc$ является произведением четырех множителей, из которых первый множитель обозначен цифрой, а три следующих — буквами a, b, c.

Множители, записанные с помощью цифр, называются ***числовыми множителями,*** *а множители, обозначенные буквами, —* ***буквенными множителями****. Алгебраическое выражение, состоящее из произведения числовых и буквенных множителей, называют* ***одночленом.***

Например, одночленами являются выражения:

$$abc,\ (-4)a \cdot 3ab,\ \frac{1}{4}a(-0{,}3)bab.$$

Так как произведение равных множителей можно записать в виде степени с натуральным показателем, то *степень числа и произведение степеней чисел также называют одночленами.*

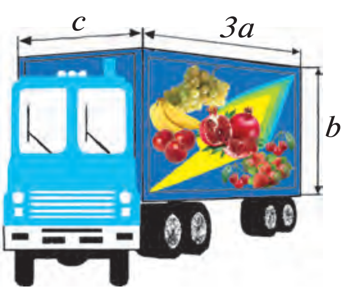


Рис. 8

Например, одночленами являются выражения

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2,\ (-7),\ c^5,\ 4a^2,\ \left(-\frac{1}{2}\right)a^2b.$$

Так как каждое число можно записать в виде произведения этого числа на единицу, то выражения вида a, 2, $\frac{3}{8}$ также считают одночленами.

Задача. Найти значение одночлена $16ac \cdot (0,5)\, a \cdot (0,25)\, b$ при $a = \frac{1}{3}$, $b = 34$, $c = \frac{9}{17}$.

△ Если подставить данные значения букв в одночлен, то придется вычислить произведение

$$16 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{17} \cdot 0,5 \cdot \frac{1}{3} \cdot 0,25 \cdot 34.$$

Эти числа можно перемножать одно за другим в том порядке, в котором они записаны:

$$16 \cdot \frac{1}{3} = \frac{16}{3}; \ \frac{16}{3} \cdot \frac{9}{17} = \frac{48}{17}; \ \frac{48}{17} \cdot 0,5 = \frac{24}{17};$$
$$\frac{24}{17} \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{17}; \ \frac{8}{17} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{17}; \ \frac{2}{17} \cdot 34 = 4.$$

Вычисления можно провести короче, если сначала упростить данный одночлен, используя переместительный и сочетательный законы умножения:

$$16ac\,(0,5)\,a\,(0,25)\,b = (16 \cdot 0,5 \cdot 0,25)\,(a \cdot a)\,bc = 2a^2bc.$$

Теперь находим значение одночлена $2a^2bc$ при $a = \frac{1}{3}$, $b = 34$, $c = \frac{9}{17}$:

$$2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot 34 \cdot \frac{9}{17} = \frac{2 \cdot 34 \cdot 9}{9 \cdot 17} = 4. \ ▲$$

При решении задачи вторым способом данный одночлен был записан в более простом виде: $2a^2bc$. Это пример одночлена *стандартного вида*.

Одночлен, содержащий только один числовой множитель, стоящий на первом месте, и степени с различными буквенными основаниями, называется ***одночленом стандартного вида****.*

Любой одночлен можно записать в стандартном виде. Для этого нужно перемножить все числовые множители и поставить их произведение на первое место. Затем произведение степеней с одинаковым основанием записать в виде степени. Буквенные множители чаще всего располагают в алфавитном порядке, хотя это необязательно.

Заметим, что в одночлене стандартного вида нет буквенных степеней с одинаковыми основаниями.

Числовой множитель одночлена, записанного в стандартном виде, называют ***коэффициентом этого одночлена****.*

Например, коэффициент одночлена $2a$ равен 2, коэффициент одночлена $\frac{5}{6}ab^2$ равен $\frac{5}{6}$, коэффициент одночлена $(-7)a^2b^3c$ равен (-7). В последнем случае одночлен можно записать без скобок: $(-7)a^2b^3c=-7a^2b^3c$.

Коэффициент, равный 1, обычно не записывают, так как от умножения на единицу число не меняется. Например, $1\cdot abc^2=abc^2$, т. е. коэффициент одночлена abc^2 равен единице.

Если коэффициент равен (-1), то и в этом случае единицу и скобки можно не писать, а оставить только знак «$-$». Например, $(-1)abc=-abc$, т. е. коэффициент одночлена $-abc$ равен -1.

Упражнения

Вместо словесной формулировки запишите алгебраическое выражение **(222—224):**

222. 1) удвоенное произведение чисел a и b;
2) утроенное произведение чисел b и c;
3) произведение квадратов чисел x и y;
4) произведение числа a и квадрата числа b.

223. 1) произведение куба числа m и числа p;
2) утроенное произведение квадрата числа a и числа b.

224. 1) число секунд в t часах;
2) число сантиметров в n метрах.

225. 1) Выведите формулу вычисления заштрихованной площади, используя заданные измерения;

2) Покажите с помощью фигур верность равенства

$$2bc + 2c(a-2c) = 2ac + 2c(b-c).$$

3) Объясните, что площадь заштрихованной фигуры равна разности площадей двух прямоугольников. Используя это, докажите равенство

$$ab-(b-2c)(a-2c) = 2ac + 2c(b-2c).$$

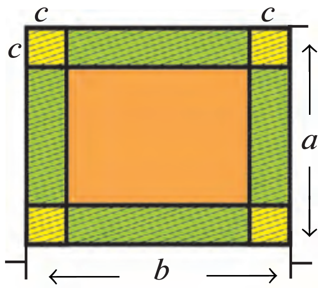


Рис. 9

226. Найдите числовое значение одночлена:

1) $\frac{3}{4}a^3$ при $a=-2$;

2) $0,5b^2$ при $b=-4$;

3) $3abc$ при $a=2$, $b=\frac{1}{2}$, $c=\frac{1}{3}$;

4) $4pqr$ при $p=\frac{1}{2}$, $q=3$, $r=\frac{1}{6}$;

5) $\frac{1}{7}m^2(-0,2)n$ при $m=3$, $n=-35$;

6) $\frac{1}{9}y(-0,3)x^2$ при $y=-15$, $x=6$.

227. Запишите одночлен в стандартном виде:

1) $3m^2m$; 3) $ab\cdot 0,5$; 5) $5^2pq^2(-4)pq$;

2) z^5z^5z; 4) $(-m)(-m^3)$; 6) $2^3qp^2(-3)^2pq$.

228. Запишите одночлен в стандартном виде и найдите его числовое значение:

1) $ac12c$ при $a=-\frac{1}{3}$, $c=4$;

2) $\frac{1}{6}a8b^2\,\frac{3}{4}ba^3$ при $a=-2$, $b=\frac{1}{2}$.

229. (*Старинная задача.*) К бассейну подведены 4 трубы. Через первую трубу бассейн наполняется за один день, через вторую — за два дня, через третью — за три дня и через четвертую — за 4 дня. За какое время бассейн наполнится, если открыть все четыре трубы?

§ 12 Умножение одночленов

Рассмотрим следующую задачу.

Задача. Объем прямоугольного параллелепипеда вычисляется по формуле $V = abc$, где a — длина, b — ширина и c — высота этого параллелепипеда. Каким будет объем нового параллелепипеда, если длину данного увеличить в 5 раз, ширину — в $2n$ раз, высоту — в $3n$ раз?

△ Найдем измерения нового параллелепипеда: длина $5a$, ширина $2nb$, высота $3nc$. Его объем равен

$$V_1 = (5a)\cdot(2nb)\cdot(3nc). \ \blacktriangle$$

Выражение $(5a)\cdot(2nb)\cdot(3nc)$ является произведением трех одночленов: $5a$, $2\ nb$, $3nc$.

По свойствам умножения чисел можно написать равенство:

$$(5a)\cdot(2nb)\cdot(3nc) = 5a2nb3nc = (5\cdot 2\cdot 3)\cdot(annbc) = 30n^2abc.$$

В результате умножения одночленов снова получается одночлен. Его нужно упростить, записав в стандартном виде. Например,

$$(3\ a^2\ b^3\ c)\cdot(4\ a\ b^2) = 12\ a^3\ b^5\ c.$$

Рассмотрим произведение двух или нескольких одинаковых одночленов, т. е. степень одночлена, например $\left(5a^3b^2c\right)^2$. Так как этот одночлен является произведением множителей 5, a^3, b^2, c, то по свойству возведения произведения в степень имеем:

$$(5a^3b^2c)^2 = 5^2\left(a^3\right)^2\left(b^2\right)^2c^2 = 25a^6b^4c^2.$$

Точно так же

$$(2pq^2)^3 = 2^3p^3\left(q^2\right)^3 = 8p^3q^6.$$

В результате возведения одночлена в натуральную степень снова получается одночлен.

Выполните умножение одночленов **(230—237):**

230. 1) $(2a)(3b)$; 2) $(3a)(2b)$; 3) $b^2(-3b^3)$; 4) $(-2a)a^2$.

231. 1) $(2p)(-3c^2)$; 3) $(4a^2)(6a^3)$;

2) $(-5m^2)(-7n)$; 4) $\left(-\frac{1}{2}b^3\right)(8b^2)$.

232. 1) $(0,3a^2)\left(\frac{1}{4}b^3\right)$; 3) $(0,2p)(-1,3q^2)$;

2) $(-8m^3)(0,25n)$; 4) $\left(-\frac{3}{7}c^2\right)\left(-\frac{5}{6}b^3\right)$.

233. 1) $(3ab)(-2a^2b)$; 3) $(8ab^2)\left(\frac{1}{4}ac^2\right)$;

2) $(-4x^2y)(-7xy^2)$; 4) $(6a^2b)\left(\frac{1}{3}bc^2\right)$.

234. 1) $(3a^2b^5c)(6a^3bc^2)$; 3) $\left(\frac{2}{3}a^2b^3x\right)\left(\frac{3}{4}a^3bx^2\right)$;

2) $(7a^5b^2c)(-3ab^4c)$; 4) $\left(-\frac{3}{2}a^3xy^3\right)\left(\frac{3}{4}ax^2y\right)$.

235. 1) $(-0,4x^5y^6z^2)(-1,2xyz^3)$; 3) $\left(-1\frac{1}{3}x^2y^3z\right)\left(-1\frac{1}{2}xy^2z^3\right)$;

2) $(-2,5n^4m^5r^2)(3nm^2r^5)$; 4) $\left(2\frac{1}{4}a^2b^5c^3\right)\left(-3\frac{1}{3}a^3b^2c^4\right)$.

236. 1) $\left(-\frac{1}{3}m^2\right)(-24n)(4mn)$; 2) $(-18n)\left(-\frac{1}{6}m^2\right)(-5mn)$;

3) $\left(\frac{1}{3}ay^3\right)\left(\frac{3}{4}x^2y\right)(0,2a^3x)$; 4) $(-13a^2bc)(-5ab^2c)(-0,4abc^3)$.

237. 1) $(-a)(3b)(4a^2b)(5ab^2)$; 3) $(-1,5ab)\left(\frac{1}{4}bc\right)(2ac)(24ab)$;

2) $(5a)(a^2b^2)(-2b)(-3a)$; 4) $(1,2a^2)\left(-\frac{1}{3}ab\right)(-5bc)(2c^2)$.

Возведите одночлен в степень **(238—241):**

238. 1) $(2a)^3$; 2) $(5b)^2$; 3) $(3b^2)^4$; 4) $(2a^3)^2$.

239. 1) $(-3ab)^4$; 2) $(-4ab)^2$; 3) $(-abc)^5$; 4) $(-2xyz)^3$.

240. 1) $(-2a^2b)^3$; 2) $(-a^2bc)^5$; 3) $(-3x^3y)^2$; 4) $(-2x^2y^3)^4$.

241. 1) $\left(\frac{1}{2}nm^2\right)^3$; | 2) $\left(\frac{1}{3}n^2m^2\right)^4$; | 3) $(-0{,}1a^3b^3)^3$; | 4) $(0{,}4a^3b^2)^2$.

Выполните действия **(242—243):**

242. 1) $(-2a)^3(-3a)$;
2) $(-a)^3(2a)$;
3) $(-0{,}2bc^2)^2(20cx^2)$;
4) $(-0{,}1ab^2c)^2(100by^2)$.

243. 1) $\left(-1\frac{3}{5}x^3y^2\right)\left(-\frac{1}{2}c^2x^2\right)^3$;
2) $\left(2\frac{1}{4}x^3y\right)\left(\frac{2}{3}xy^2\right)^2$;
3) $(-3bc^2)^3(2ab^2)^2$;
4) $(-2a^2b)^2(-a^2b^3)^3$.

245. Запишите одночлен в виде квадрата другого одночлена:
1) $9a^2$; 2) $16x^4$; 3) $25a^2b^4$;
4) $81x^6y^2$; 5) $36x^{10}y^4$; 6) $1{,}21a^8b^4$.

245. Перемножьте одночлены и найдите числовое значение полученного выражения:

1) $\frac{1}{3}a^2 \cdot 3a^2b$, где $a=-2$, $b=\frac{5}{7}$;

2) $\frac{2}{5}mn \cdot 10n^2$, где $m=0{,}8$, $n=4$;

3) $4a \cdot \frac{1}{16}a^2b^2c$, где $a=4$, $b=\frac{1}{4}$; $c=3$;

4) $0{,}7m^2n \cdot 100np$, где $m=0{,}3$, $n=-0{,}2$, $p=4$.

246. (*Старинная задача.*) Треть рыбы погружена в ил, четверть находится под водой и три пяди — над водой. Найдите длину рыбы в пядях (пядь — старинная мера длины, равная обычно 17,78 см).

§ 13 Многочлены

В алгебре часто рассматриваются алгебраические выражения, представляющие собой сумму или разность одночленов. Например, площадь заштрихованной части фигуры, изображенной на рис. 10 *а*, равна $\frac{1}{2}ac+b^2$, а площадь фигуры, изображенной на рис. 10 *б*, равна $ab-c^2$. Выражение $\frac{1}{2}ac+b^2$ — сумма двух одночленов $\frac{1}{2}ac$ и b^2. Выражение $ab - c^2$ — разность двух одночленов ab и c^2 или сумма одночленов ab и $(-c^2)$. Эти выражения являются алгебраическими суммами одночленов. Такие выражения называют *многочленами*.

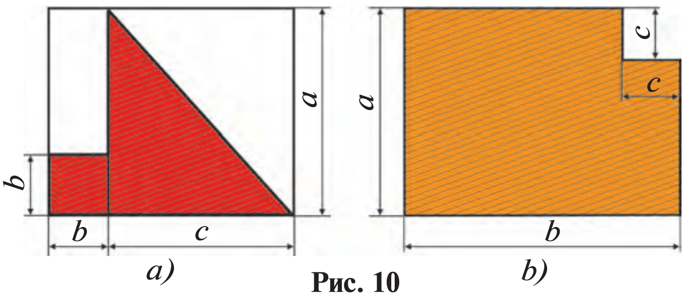


Рис. 10

Многочленом *называется алгебраическая сумма нескольких одночленов.*

Одночлены, из которых составлен многочлен, называют членами *этого* многочлена.

Например, членами многочлена $5nm^2-3m^2k-7nk^2+4nm$ являются $5nm^2$, $-3m^2k$, $-7nk^2$, $4nm$.

Многочлен, состоящий из двух членов, называют двучленом, многочлен, состоящий из трех членов, — трехчленом и т. д.

Примеры двучленов: a^2-b^2, $5ac+4c$.

Примеры трехчленов: $a+2b-3c$, $\frac{1}{2}-bc+3ab$.

Одночлен считают многочленом, состоящим из одного члена.

Если некоторые члены многочлена записаны не в стандартном виде, то этот многочлен можно упростить, записав все его члены в стандартном виде.

Задача. Упростить многочлен $2a4b-5abac+9bc\frac{1}{3}c$.

△ Запишем все члены данного многочлена в стандартном виде:

$$2a4b=8ab;\quad -5abac=-5a^2bc;\quad 9bc\frac{1}{3}c=3bc^2.$$

Следовательно, $2a4b-5abac+9bc\frac{1}{3}c=8ab-5a^2bc+3bc^2$. ▲

Упражнения

247. Назовите одночлены, входящие в многочлен:

1) $-2x^2+3x-1$;
2) $4x^2-3x+6$;
3) $7a^2-\frac{1}{3}b-\frac{2}{5}c$;
4) $-3a+0,5x-2x^2$.

248. Запишите следующие многочлены в виде суммы одночленов:

1) $7a^4-9a^3-2a+11$;
2) $-6x^5+3x^4-12x^2+5$;
3) $1,6a^3b-4a^2b^2+13ab^3-b^4$;
4) $2,5x^4-18x^3y-16x^2y-3xy^2$.

249. Составьте многочлен из одночленов:

1) $6x^2$, $7x$ и 9;
2) $2x^2$, $-11x$ и 3;
3) $-x^4$, x^3 и $-x$;
4) a^5, $-a^4$ и a;
5) $8a^3$, $4a^2b$, $-2ab^2$ и b^3;
6) $4a^3b$, $-2a^2b^2$, $-5ab^3$.

250. Упростите многочлен, записав каждый его член в стандартном виде:

1) $12a^2 3ba-2ab3ab^2+11aba$;
2) $2ab^2 4ab-3a^2 8aba-2abab^2$;
3) $1,5xy^2(-4)xyz-4mnk5m^2nk$;
4) $4cc^2c\left(-\frac{1}{4}\right)bc+5xy^2xy^2$.

251. Упростите многочлен, записав каждый его член в стандартном виде:

1) $3aaa\left(-1\frac{2}{3}ab\right)+4xxx3xy$;
2) $1,5yyy(-4xyz)-4mnk\cdot 5m^2nk^2$;
3) $(2ab)\left(\frac{1}{4}a^2b^2\right)-(3a^2b)\left(\frac{1}{9}b\right)$;
4) $(3a)\left(\frac{1}{9}ab^2\right)-(4b^2)\left(\frac{1}{2}a^2b\right)$.

252. Найдите числовое значение многочлена:

1) $2a^3+3ab+b^2$ при $a=0,5$, $b=\frac{2}{3}$;
2) $2a^4-ab+2b^2$ при $a=-1$, $b=-0,5$;
3) $x^3-2xy+y^2$ при $x=y=-4,2$;
4) $x^2+2xy+y^2$ при $x=1,2$, $y=-1,2$.

253. Упростите многочлен и найдите его числовое значение:

1) $-aba+a^2b2ab^2+4$ при $a=2$, $b=\frac{1}{2}$;
2) $b^25ab-5a5a^2b$ при $a=\frac{1}{5}$, $b=-2$;
3) $x^2yxy-xy^2xy+xy$ при $x=-3$, $y=2$;
4) $xy^2x^2y-xyxy$ при $x=-2$, $y=3$.

§ 14 Приведение подобных членов

Решим следующие задачи.

Задача 1. Имеются две книги с одинаковым числом букв на каждой странице; на одной странице помещается n строк и в каждой строке m букв. В первой книге 300 страниц, во второй — 500. Сколько всего букв в двух книгах?

1-й способ. Число букв на каждой странице равно mn. В первой книге $300nm$ букв, во второй $500nm$ букв, число букв в двух книгах $300nm+500nm=800nm$.

2-й способ. Число букв на каждой странице равно mn. Число страниц в двух книгах равно $300 + 500 = 800$. Поэтому число букв в них равно $800\,nm$.

Разумеется, оба ответа верные, поэтому

$$300\,nm + 500\,nm = 800\,nm.$$

Однако при вычислениях второй ответ оказывается более удобным. Например, если $n = 40$, $m = 50$, то $nm = 2\,000$ и для вычисления выражения $300nm + 500nm$ нужно сделать еще три действия:

$$300 \cdot 2000 + 500 \cdot 2000 = 600\,000 + 1\,000\,000 = 1\,600\,000.$$

а для вычисления выражения $800\,nm$ нужно сделать всего одно действие: $800 \cdot 2000 = 1\,600\,000$.

Именно поэтому важно уметь упрощать алгебраические выражения.

Двучлен $300\,nm + 500\,nm$ является суммой двух одночленов:

$$300\,nm \text{ и } 500\,nm.$$

Эти одночлены отличаются друг от друга только коэффициентами. Такие одночлены называют *подобными*. Например, одночлены abc и $3abc$ подобны, одночлены $2pq^2$ и $5q^2p$ подобны, а одночлены a^2b и ab^2 не подобны.

Одинаковые одночлены также считают подобными. Например, одночлены $2a^2b$ и $2a^2b$ подобны.

Задача 2. Упростить многочлен

$$3ab - 2bc + 4ac - ab + 3bc + 4ab\,.$$

△ Выделим подобные одночлены. Одночлены $3ab$, $-ab$, $4ab$ подобны, подчеркнем их одной чертой. Подобные одночлены $-2bc$ и $3bc$ подчеркнем двумя чертами. Подобных одночлену $4ac$ нет, его подчеркивать не будем. Получим:

$$\underline{3ab} - \underline{\underline{2bc}} + 4ac - \underline{ab} + \underline{\underline{3bc}} + \underline{4ab}.$$

Переставим члены многочлена так, чтобы подобные члены стояли рядом, и заключим подобные члены в скобки. Получим:

$$(3ab - ab + 4ab) + (-2bc + 3bc) + 4ac.$$

Так как

$$3ab - ab + 4ab = (3 - 1 + 4)ab = 6ab,$$
$$-2bc + 3bc = (-2 + 3)bc = bc,$$

то

$$3ab - 2bc + 4ac - ab + 3bc + 4ab = 6ab + bc + 4ac. \ \blacktriangle$$

Такое упрощение многочлена, при котором алгебраическая сумма подобных одночленов заменяется одним одночленом, называют *приведением подобных членов.*

У многочлена $6ab + bc + 4ac$ каждый член записан в стандартном виде, и среди них нет подобных. Такой вид многочлена называют *стандартным.*

Любой многочлен можно записать в стандартном виде. Для этого нужно записать каждый член многочлена в стандартном виде и привести подобные члены.

Задача 3. Привести к стандартному виду многочлен

$$6ab\frac{1}{3}ac - 3aca - 8a^2\frac{1}{2}b + 25a^2\frac{1}{5}c + aba - a^2bc.$$

$$\triangle \ 6ab\frac{1}{3}ac - 3aca - 8a^2\frac{1}{2}b + 25a^2\frac{1}{5}c + aba - a^2bc =$$
$$= \underline{2a^2bc} - \underline{\underline{3a^2c}} - \underline{\underline{\underline{4a^2b}}} + \underline{\underline{5a^2c}} + \underline{\underline{\underline{a^2b}}} - \underline{a^2bc} =$$
$$= (2a^2bc - a^2bc) + (-3a^2c + 5a^2c) + (-4a^2b + a^2b) =$$
$$= a^2bc + 2a^2c - 3a^2b. \ \blacktriangle$$

Упражнения

Приведите подобные члены **(254—255):**

254. 1) $\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x$; 3) $\frac{3}{2}y^4 - \frac{1}{16}y^4 + \frac{1}{32}y^4 - \frac{1}{4}y^4$;

2) $\frac{5}{6}y - \frac{1}{3}y - \frac{1}{6}y$; 4) $\frac{3}{2}a^2b - \frac{5}{8}a^2b + \frac{1}{8}a^2b - \frac{3}{16}a^2b$.

255. 1) $2m + q + q - 4m$; 3) $x^2 + 3y^2 + 4x - y^2$;

2) $3a + 2b - b - a$; 4) $5a^2 - 4b^2 - 3a^2 + b^2$.

Приведите многочлен к стандартному виду **(256—261):**

256. 1) $11x^2+4x-x^2-4x$;
2) $2y^2-3y+2y-2y^2$;
3) $0,3c^2-0,1c^2-0,5c^3$;
4) $1,2a^2+3,4a^2-0,8a^2$.

257. 1) $\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{3}y+\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}y$;
2) $\frac{1}{5}a^2+\frac{3}{4}b^2+\frac{4}{5}a^2-\frac{3}{4}b^2$;
3) $2ab+0,7b^2-5ab+1,2b^2+8ab$;
4) $5xy-3,5y^2-2xy+1,3y^2-xy$.

258. 1) $-\frac{3}{4}xy+\frac{2}{3}x^2y+xy-\frac{5}{6}x^2y-\frac{1}{2}xy$;
2) $\frac{1}{2}ab^2-\frac{7}{8}ab^2+\frac{3}{4}a^2b-\frac{3}{8}a^2b-\frac{1}{2}ab^2$;
3) $-9,387a-3,89b+8,197a-1,11b-0,81a$;
4) $8,53x-4,73y-5,12x+2,27y+0,59x$.

259. 1) $2a^2b-8b^2+5a^2b+5c^2-3b^2+4c^2$;
2) $8xy^2+4x^3-5x^2y-3x^3+4x^2y-9xy^2$;
3) $\frac{1}{7}ab+\frac{3}{8}a^2-\frac{2}{5}b^3+\frac{6}{7}ab-\frac{3}{8}a^2+\frac{3}{5}b^3$;
4) $\frac{3}{5}ab^2-\frac{2}{3}ab+\frac{1}{4}a^3+\frac{8}{3}ab+\frac{2}{5}ab^2-\frac{3}{4}a^3+\frac{1}{2}a^3$.

260. 1) $5b3b-4c3b-5b2c-4c(-2)c$;
2) $b8b-3c8b+5cb-3c5c$;
3) $6a^2 2a^2+5b^2 2a^2-6a^2 4b^2-5b^2 4b^2$;
4) $2x^2\frac{1}{2}y-\frac{1}{3}ab3a+1\frac{1}{4}y\frac{4}{5}x^2+aab$.

261. 1) $-9a^2\frac{1}{3}b+a^2b+24a^2\frac{1}{4}c$;
2) $2ab\frac{1}{3}ac-4aca-a^2bc$;
3) $4x^2\frac{1}{2}y-\frac{1}{3}ab9a+4y\frac{4}{5}x^2+aba$;
4) $5a\frac{1}{2}b+\frac{2}{3}a\left(\frac{1}{4}b^2\right)-5b(0,5a)-\frac{1}{3}a^2\left(\frac{1}{15}ab\right)$.

§ 15 Сложение и вычитание многочленов

Рассмотрим треугольник, размеры которого указаны на рис. 11. Его периметр P равен сумме длин сторон:

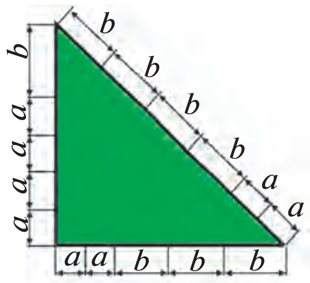


Рис. 11

$$P = (2a + 3b) + (4a + b) + (2a + 4b).$$

Это выражение является суммой трех многочленов:

$$2a + 3b, \quad 4a + b, \quad 2a + 4b.$$

Раскроем скобки:

$$P = 2a + 3b + 4a + b + 2a + 4b.$$

Приведя подобные члены, получим:

$$P = 8a + 8b.$$

Точно так же любую алгебраическую сумму многочленов можно преобразовать в многочлен стандартного вида. Например,

$$\left(2n^2 - m^2\right) - \left(n^2 - m^2 + 3q^2\right) = 2n^2 - m^2 - n^2 + m^2 - 3q^2 = n^2 - 3q^2;$$

$$\left(3ab - 4bc\right) + \left(bc - ab\right) - \left(ac - 3bc\right) =$$

$$= 3ab - 4bc + bc - ab - ac + 3bc = 2ab - ac.$$

В результате сложения и вычитания нескольких многочленов снова получается многочлен.

Чтобы записать алгебраическую сумму нескольких многочленов в виде многочлена стандартного вида, нужно раскрыть скобки и привести подобные члены.

Иногда сумму или разность многочленов удобно находить «столбиком» (по аналогии со сложением и вычитанием чисел). При этом подобные члены располагаются друг под другом, например:

1) $$\begin{array}{r} + \begin{array}{r} 5a-4bc+3ac \\ 3bc-7ac \end{array} \\ \hline 5a-bc-4ac \end{array};$$

2) $$\begin{array}{r} - \begin{array}{r} 5abc-2ab+4ac-bc \\ 3abc-3ab-ac+3bc \end{array} \\ \hline 2abc+ab+5ac-4bc \end{array}.$$

Упражнения

Упростите алгебраическую сумму многочленов **(262—267):**

262. 1) $8a+(-3b+5a)$; 3) $(6a-2b)-(5a+3b)$;

2) $5x-(2x-3y)$; 4) $(4x+2)+(-x-1)$.

263. 1) $3x^2-(4x^2+2y)$; 3) $0,6a^2-(0,5a^2-0,4a)$;

2) $2a^2-(b^2-3a^2)$; 4) $1\frac{1}{2}b^2-\left(2b^2-1\frac{1}{4}\right)$.

264. 1) $\left(2\frac{3}{5}b-\frac{3}{4}b^2\right)+\left(\frac{1}{4}b^2-1\frac{3}{5}b\right)$;

2) $(0,1c-0,4c^2)-(0,1c-0,5c^2)$;

3) $(13x-11y+10z)-(-15x+10y-15z)$;

4) $(17a+12b-14c)-(11a-10b-14c)$.

265. 1) $(7m^2-4mn-n^2)-(2m^2-mn+n^2)$;

2) $(5a^2-11ab+8b^2)+(-2b^2-7a^2+5ab)$;

3) $(11ac+13bc+17b^2)-(10ac+10bc-3b^2)$;

4) $(41z+13az+26az^2)-(16z+13az-4az^2)$.

266. 1) $\left(\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}b\right)-\left(\frac{5}{2}a-\frac{2}{3}b\right)+(a+b)$;

2) $(0,3a-1,2b)+(a-b)-(1,3a-0,2b)$;

3) $(11p^3-2p^2)-(p^3-p^2)+(-5p^2-3p^3)$;

4) $(5x^2+6x^3)+(x^3-x^2)-(-2x^3+4x^2)$.

267. 1) $(-2x^3+xy^2)+(x^2y-1)+(x^2y-xy^2+3x^3)$;

2) $(3x^2+5xy+7x^2y)-(5xy+3x^2)-(7x^2y-3x^2)$;

3) $\left(8a^2-10ab-b^2\right)+\left(-6a^2+2ab-b^2\right)-\left(a^2-8ab+4b^2\right)$;

4) $\left(4a^2-2ab-b^2\right)-\left(-a^2+b^2-2ab\right)+\left(3a^2+b^2-ab\right)$.

268. Найдите сумму и разность многочленов:

1) $0,1x^2+0,02y^2$ и $0,17x^2-0,08y^2$;

2) $0,1x^2-0,02y^2$ и $-0,17x^2+0,08y^2$;

3) $a^3-0,12b^3$ и $0,39a^3-b^3$;

4) $a^3+0,12b^3$ и $-0,39a^3+b^3$.

269. Найдите сумму многочленов «столбиком»:

1) $3ab+a^2-2b^2$ и $2a^2-3ab$;

2) $3x^2+2xy-4y^2$ и $4y^2-2xy+3x^2y^2-x^3$.

270. Найдите разность многочленов «столбиком»:

1) $3a^2+8a-4$ и $3+8a-5a^2$;

2) b^3-3b^2+4b и $b+2b^2+b^3$.

271. Упростите выражение:

1) $P+Q$, если $P=5a^2+b$, $Q=-4a^2-b$;

2) $P-Q$, если $P=2p^2-3q^3$, $Q=2p^2-4q^3$;

3) $A+B+C$, если $A=a^2-b^2+ab$,
$B=2a^2+3ab-5b^2$, $C=-4a^2+2ab-3b^2$;

4) $A-B+C$, если $A=2a^2-3ab+4ab^2$,
$B=3a^2+4ab-b^2$, $C=a^2+2ab-3b^2$.

272. Докажите, что:

1) сумма пяти последовательных натуральных чисел делится на 5;

2) сумма четырех последовательных натуральных чисел не делится на 4;

3) сумма четырех последовательных нечетных чисел делится на 8.

4) сумма четырех последовательных четных натуральных чисел делится на 4.

273. В автобусе было n пассажиров. На первых двух остановках из автобуса вышли по m пассажиров на каждой. На третьей остановке никто не вышел, но несколько человек сели в автобус. После этого в автобусе оказалось k пассажиров. Сколько человек сели в автобус на третьей остановке?

§ 16 Умножение многочлена на одночлен

Рис. 12

Рассмотрим прямоугольный параллелепипед, размеры которого указаны на рис. 12. Его объем равен произведению высоты и площади основания:

$$(a + 2b + c) \cdot (3ab).$$

Это выражение является произведением многочлена $a + 2b + c$ и одночлена $3ab$.

Применив распределительное свойство умножения, можно записать:

$$(a + 2b + c)(3ab) = a(3ab) + 2b(3ab) + \\ + c(3ab) = 3a^2b + 6ab^2 + 3abc.$$

Точно так же выполняется умножение любого многочлена на одночлен, например:

$$\left(2n^2m - 3nm^2\right)\left(-4nm\right) = \left(2n^2m\right)\left(-4nm\right) + \left(-3nm^2\right)\left(-4nm\right) = \\ = -8n^3m^2 + 12n^2m^3;$$

$$\left(3a^2 - 4ab + 5c^2\right)\left(-5bc\right) = 3a^2\left(-5bc\right) - 4ab\left(-5bc\right) + \\ + 5c^2\left(-5bc\right) = -15a^2bc + 20ab^2c - 25bc^3.$$

Чтобы умножить многочлен на одночлен, нужно каждый член многочлена умножить на этот одночлен и полученные произведения сложить.

В результате умножения многочлена на одночлен снова получится многочлен. Получившийся многочлен нужно упростить, записав его в стандартном виде. Промежуточный результат можно не записывать, а сразу писать ответ, выполняя умножение одночленов устно, например:

$$\left(-3ab + 2a^2 - 4b^2\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}ab\right) = \frac{3}{2}a^2b^2 - a^3b + 2ab^3.$$

Умножение одночлена на многочлен производится по тому же правилу, так как при перестановке множителей произведение не меняется, например: $4pq\,(3p^2 - q + 2) = 12p^3q - 4pq^2 + 8pq$.

Упражнения

Найдите произведение многочлена и одночлена **(274—278):**

274. 1) $(-5)(10+m)$;
2) $\left(-\frac{1}{2}\right)(-2+x)$;
3) $(2y-5)\left(-\frac{1}{7}\right)$;
4) $(-2m+3n)(-10)$.

275. 1) $(a-b)n$;
2) $(-5x+4y)\,2z$;
3) $-6x(5y-2x)$;
4) $(x^2-x+1)x$.

276. 1) $7ab(2a+3b)$;
2) $5a^2b(15b+3)$;
3) $12p^2q(q^2p-q^2)$;
4) $3xy^2(xy-2x^3)$.

277. 1) $17a(5a+6b-3ab)$;
2) $8ab(2b-3ac+c^2)$;
3) $3x^2y(5x+6y+7z)$;
4) $xyz(x^2+2y^2+3z^2)$.

278. 1) $\left(\frac{1}{2}a^3b^2-\frac{3}{4}ab^4\right)\frac{4}{3}a^3b$;
2) $\left(\frac{2}{3}a^2b^4+\frac{1}{2}a^3b\right)\frac{3}{2}ab^3$.

Упростите выражение **(279—281):**

279. 1) $6(2t-3n)-3(3t-2n)$; 3) $-2(3x-2y)-5(2y-3x)$;

2) $5(a-b)-4(2a-3b)$; 4) $7(4p+3)-6(5+7p)$.

280. 1) $(x^2-1)3x-(x^2-2)2x$;

2) $(4a^2-3b)2b-(3a^2-4b)3b$;

3) $2(3a+4)+3(a-7)-7(2a-7)$;

4) $3(2x-1)-5(x-3)+6(3x-4)$.

281. 1) $5(0{,}8y-0{,}1)-0{,}7(4y+1)+8(0{,}7-0{,}4y)$;

2) $3\left(\frac{1}{2}x-1\frac{1}{2}\right)+2\left(\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}\right)$; 3) $\frac{5}{4}\left(\frac{1}{5}x-\frac{1}{5}\right)-\frac{4}{5}\left(\frac{1}{4}x-\frac{3}{4}\right)$;

4) $0{,}2(5y+6)-4(0{,}25y-1{,}3)+5(0{,}1y-1{,}62)$.

282. Найдите значение алгебраического выражения:

1) $7(4a+3b)-6(5a+7b)$ при $a=2,\ b=-3$;

2) $a(2b+1)-b(2a-1)$ при $a=10,\ b=-5$;

3) $3ab(4a^2-b^2)+4ab(b^2-3a^2)$ при $a=10,\ b=-5$;

4) $4a^2(5a-3b)-5a^2(4a+b)$ при $a=-2,\ b=-3$.

§ 17 Умножение многочлена на многочлен

Задача. Найти площадь поверхности стены, занятой шкафами, размеры которых указаны на рис. 13.

△ Поверхность стены, занятая шкафами, является прямоугольником со сторонами

$$2a+c+2a=4a+c \text{ и } a+b+a=2a+b.$$

Площадь этого прямоугольника равна $S=(4a+c)(2a+b)$. ▲

Выражение $(4a+c)(2a+b)$ является произведением многочленов $4a+c$ и $2a+b$.

Применяя распределительное свойство умножения чисел, можно записать:

$$S=(4a+c)(2a+b)=4a(2a+b)+c(2a+b).$$

Далее, так как $4a(2a+b)=8a^2+4ab$ и $c(2a+b)=2ac+bc$, то $S=8a^2+4ab+2ac+bc$.

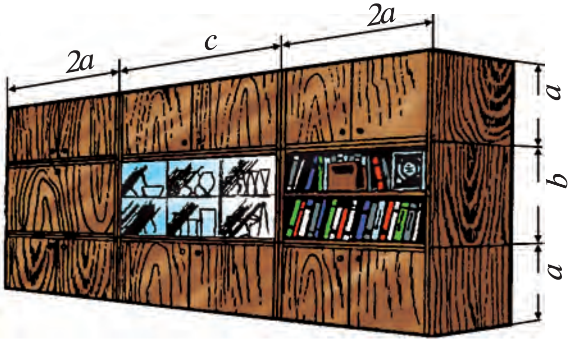


Рис. 13

Таким образом, для нахождения произведения данных многочленов пришлось перемножить каждый член многочлена $4a+c$ на каждый член многочлена $2a+b$ и результаты сложить. Точно так же перемножаются любые два многочлена, например:

$$(7n-2m)\,(3n-5m)=(7n)\cdot(3n)+(7n)\cdot(-5m)+(-2m)\cdot(3n)+$$

$$+(-2m)\cdot(-5m)=21n^2-35nm-6mn+10m^2=21n^2-41nm+10m^2.$$

$$(\boxed{7n}\ -2m)\,(3n\ -5m)=\boxed{21n^2}\ \boxed{-35nm}\ -6mn\ +10m^2.$$

Чтобы умножить многочлен на многочлен, нужно умножить каждый член одного многочлена на каждый член другого многочлена и полученные произведения сложить.

В результате умножения многочлена на многочлен снова получается многочлен, который нужно записать в стандартном виде.

Например,

$$(2a-4b+3c)(5b-c)=10ab-2ac-20b^2+4bc+$$
$$+15bc-3c^2=10ab-2ac-20b^2+19bc-3c^2.$$

Умножение нескольких многочленов нужно делать поочередно, например:

$$(a+b)(a+2b)(a-3b)=\left(a^2+3ab+2b^2\right)(a-3b)=$$
$$=a^3-3a^2b+3a^2b-9ab^2+2ab^2-6b^3=a^3-7ab^2-6b^3.$$

Упражнения

Выполните умножение многочленов **(283—291):**

283. 1) $(a+2)\,(a+3)$; 3) $(m+6)\,(n-1)$;
2) $(z-1)\,(z+4)$; 4) $(b+4)\,(c+5)$.

284. 1) $(c-4)\,(d-3)$; 3) $(x+y)\,(x+1)$;
2) $(a-10)\,(-a-2)$; 4) $(-p+q)\,(-1-q)$.

285. 1) $(2x+1)\,(x+4)$; 3) $(3m-2)\,(2m-1)$;
2) $(2a+3)\,(5a-4)$; 4) $(5p-3q)\,(4p-q)$.

286. 1) $\left(\frac{1}{2}a+3b\right)\left(\frac{1}{2}a-3b\right)$; 3) $\left(\frac{1}{3}a-2b\right)\left(\frac{1}{3}a+2b\right)$;
2) $(0{,}3-m)\,(m+0{,}3)$; 4) $(0{,}2a+0{,}5x)\,(0{,}2a-0{,}5x)$.

287. 1) $\left(a^2+b\right)\left(a+b^2\right)$; 3) $\left(a^2+2b\right)\left(2a+b^2\right)$;
2) $\left(5x^2-6y^2\right)\left(6x^2-5y^2\right)$; 4) $\left(x^2+2x+1\right)(x+3)$.

288. 1) $(2a-b)\left(4a^2+2ab+b^2\right)$;
2) $(3a-2b)\left(9a^2+6ab+4b^2\right)$;
3) $(5x+3y)\left(25x^2-15xy+9y^2\right)$;
4) $(3a+2b)\left(9a^2-6ab+4b^2\right)$.

289. Какие одночлены нужно поставить вместо точек, чтобы равенство было верным:

1) $(2a - 5b)(\ldots - \ldots) = 6a^3 - 15a^2b - 14ab + \ldots$;
2) $(\ldots - \ldots)(6x^2 - 5y^2) = 12x^3 + 42x^2y - \ldots - 35y^3$;
3) $(3a + 4c)(\ldots + \ldots) = 20ac + 8bc + 6ab + \ldots$;
4) $(\ldots + \ldots)(2a + 5b) = \ldots + 5ab + 8ac + 20b$?

290. 1) $(0{,}2x + 0{,}2y - z)(x - y)$; 2) $(0{,}3x - 0{,}3y + z)(x + y)$;

291. 1) $(a - b)(a + b)(a - 3b)$; 3) $(x + 3)(2x - 1)(3x + 2)$;
2) $(a + b)(a - b)(a + 3b)$; 4) $(x - 2)(3x + 1)(4x - 3)$.

292. 1) Докажите справедливость равенства:
$c^2 + b(a - c) + (b + d - c)c + d(a - c) = a(b + d)$;
2) Составьте два выражения для вычисления площади прямоугольника (рис. 14).

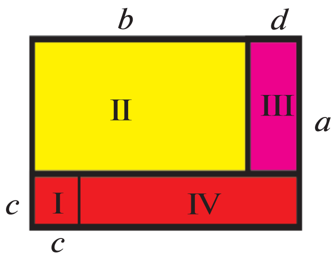


Рис. 14

Используя равенство площади прямоугольника сумме площадей прямоугольников I, II, III, IV, объясните геометрический смысл равенства 1.

293. 1) Составьте формулы для вычисления площади и периметра следующих фигур (рис. 15).

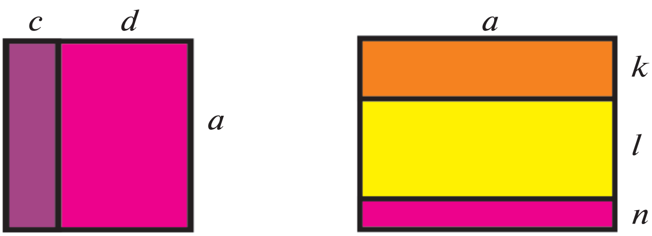


Рис. 15

2) Докажите формулы:
а) $a(c + d) = ac + ad$;

б) Докажите равенство $a \cdot (k + l + n) = ak + al + an$. Раскройте геометрический смысл этих формул.

294. 1) Рассматривая площадь прямоугольника $ABCD$ (рис. 16), покажите, что

$$(a+b)(c+d) = ac + bc + ad + bd.$$

2) Рассматривая площадь прямоугольника $ABFE$ (рис. 17), покажите, что

$$(a+b)(c-d) = ac + bc - ad - bd.$$

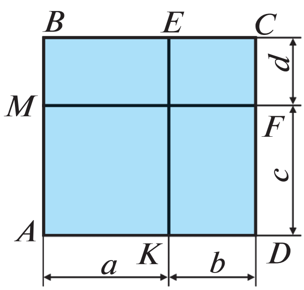


Рис. 16

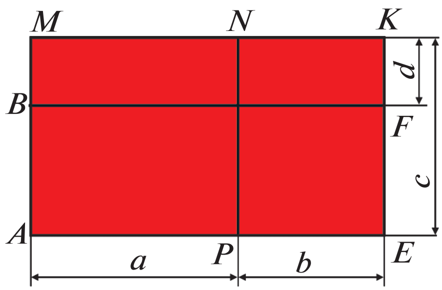


Рис. 17

§ 18 Деление одночлена и многочлена на одночлен

В предыдущих параграфах было показано, что в результате сложения, вычитания, умножения и возведения в натуральную степень нескольких одночленов и многочленов снова получается многочлен. В перечисленных действиях нет действия деления. Выражения, содержащие деление одночленов и многочленов, будут подробно рассмотрены в главе V. Иногда в результате такого деления также получается многочлен.

1. Деление одночлена на одночлен.

Задача. Разделите одночлен $32a^3b^2$ на одночлен $4a^2$.

△ Воспользуемся свойством деления числа на произведение чисел: разделим число на первый множитель произведения, результат — на второй множитель произведения и так далее. Итак,

$$\left(32a^3b^2\right) : \left(4a^2\right) = \left(\left(32a^3b^2\right) : 4\right) : a^2.$$

Теперь, по правилу деления произведения на число, разделим на число один из множителей произведения. Тогда

$$\left(32a^3b^2\right) : 4 = (32 : 4)\, a^3b^2 = 8a^3b^2;$$

$$\left(8a^3b^2\right) : a^2 = \left(8a^3 : a^2\right) b^2 = 8ab^2.$$

Таким образом,

$$\left(32a^3b^2\right) : \left(4a^2\right) = 8ab^2. \ \blacktriangle$$

Точно так же делятся одночлены и в других случаях, например:

$$4a^2b^3 : \left(4a^2b^3\right) = 1;$$

$$\left(66a^4b^2c\right) : \left(22a^2b\right) = 3a^2bc;$$

$$\left(9k^2n^2m^2\right) : \left(-3kn^2m^2\right) = -3k.$$

Результат деления можно проверить умножением: *делитель должен быть равным произведению частного на делимое.*

Например, деление $\left(56a^5b^3c\right) : \left(7a^2b^2c\right) = 8a^3b$ выполнено правильно, так как $56a^5b^3c = \left(7a^2b^2c\right) 8a^3b$.

2. Деление многочлена на одночлен.

Задача. Разделить многочлен $2a^2b + 4ab^2 + 8abc$ на одночлен $2ab$.

$\triangle$ Воспользуемся следующим правилом: *при делении суммы на число следует разделить на это число каждое слагаемое*, то есть

$$\left(2a^2b + 4ab^2 + 8abc\right) : (2ab) = \left(2a^2b\right) : (2ab) +$$

$$+ \left(4ab^2\right) : (2ab) + (8abc) : (2ab) = a + 2b + 4c. \ \blacktriangle$$

Точно так же производится деление многочлена на одночлен и в других случаях. Например:

$$\left(9a^3b^2 - 3a^2b^3 + a^2b^2\right) : \left(3a^2b^2\right) =$$

$$= \left(9a^3b^2\right) : \left(3a^2b^2\right) + \left(-3a^2b^3\right) : \left(3a^2b^2\right) + \left(a^2b^2\right) : \left(3a^2b^2\right) = 3a - b + \frac{1}{3}.$$

Чтобы разделить многочлен на одночлен, нужно каждый член многочлена разделить на этот одночлен и полученные результаты сложить.

Результат деления многочлена на одночлен можно проверить умножением. Например, деление

$$\left(36n^4m^2 - 45n^2m^4\right) : \left(9n^2m^2\right) = 4n^2 - 5m^2$$

выполнено правильно, так как

$$36n^4m^2 - 45n^2m^4 = \left(4n^2 - 5m^2\right)\left(9n^2m^2\right).$$

В рассмотренных примерах в результате деления одночлена (многочлена) на одночлен получается одночлен (многочлен). В этих случаях говорят, что одночлен (многочлен) делится на одночлен без остатка (нацело). Однако деление одночлена (многочлена) на одночлен нацело не всегда возможно. Например, многочлен $ab + ac$ не делится нацело на одночлен ab.

При делении одночлена (многочлена) на одночлен предполагается, что буквы могут принимать только такие значения, при которых делитель не равен нулю.

Упражнения

Выполните деление **(295–305):**

295. 1) $b^5 : b^2$; 2) $y^{11} : y^7$; 3) $a^7 : a^7$; 4) $b^9 : b^9$.

296. 1) $12x : 4$; 2) $(-15a) : 5$; 3) $(-18y) : 6$; 4) $10c : (-2)$.

297. 1) $8c : (-2)$; 2) $\frac{2}{3}a : 5$; 3) $\left(-\frac{1}{2}b\right) : 2$; 4) $3c : \left(-\frac{1}{3}\right)$.

298. 1) $\frac{2}{5}x : (-2)$; 2) $(-7m) : \left(-\frac{7}{9}\right)$;

3) $\left(-\frac{3}{4}a\right) : \left(-\frac{8}{9}\right)$; 4) $\frac{16}{25}b : \left(\frac{4}{5}\right)$.

299. 1) $5a : a$; 2) $8x : x$; 3) $5a : (-a)$; 4) $(-7y) : (-y)$.

300. 1) $(-6x):(2x)$; 3) $(-6xy):(-3xy)$;
2) $15z:(5z)$; 4) $12ab:(-4ab)$.

301. 1) $3a:\left(\frac{1}{2}a\right)$; 3) $(-5c):\left(\frac{1}{3}c\right)$;
2) $\frac{2}{3}b:\left(-\frac{2}{5}b\right)$; 4) $(-1{,}69n):(1{,}3n)$.

302. 1) $8abc:(-4a)$; 3) $(-6{,}4xy):(-4x)$;
2) $(-10pq):(6q)$; 4) $(-0{,}24abc):(-0{,}6ab)$.

303. 1) $14a^5:(7a^2)$; 3) $(-0{,}2a^{10}):(-a^{10})$;
2) $(-42m^7):(6m)$; 4) $\left(-2\frac{1}{3}a^{17}\right):(-2a^{17})$.

304. 1) $\left(\frac{1}{3}m^3n^2p^2\right):\left(-\frac{2}{3}m^2n^2p^2\right)$; 3) $(28{,}9p^2q^2y^3):(-1{,}7p^2y^3)$;
2) $\left(-1\frac{1}{2}a^4b^3c^2\right):\left(-\frac{2}{3}a^3bc^2\right)$; 4) $(-6a^3b^2c):(-2a^2bc)$.

305. 1) $20m^4n^3:(-5m^2n^3)$; 3) $\left(-\frac{2}{5}a^4x^3y^2\right):\left(-\frac{1}{2}a^3xy^2\right)$;
2) $(-1{,}3a^3x^2y^3):(16{,}9a^2xy)$; 4) $\left(-\frac{3}{4}a^5b^3c\right):\left(-1\frac{1}{2}a^2b^2c\right)$.

306. Упростите выражение:

1) $(4a^3b^2)^3:(2a^2b)^2$; 3) $(-abc^2)^5:(-a^2bc^3)^2$;
2) $(9x^2y)^3:(3xy)^2$; 4) $(-x^2y^3z)^4:(xyz)$.

Выполните деление **(307—310):**

307. 1) $(12a+6):3$; 3) $(14m-8):(-2)$;
2) $(10b-5):5$; 4) $(-6+3x):(-3)$.

308. 1) $(5mn-6np):n$; 3) $(x-xy):x$;
2) $(4a^2-3ab):a$; 4) $(cd-d):(-d)$.

309. 1) $\left(3a^2b-4ab^3\right):\left(5ab\right)$;
2) $\left(2c^5b^4+3c^4b^3\right):\left(-3c^4b^3\right)$;
3) $\left(-27k^4l^5+21k^3l^2\right):\left(-10k^3l^2\right)$;
4) $\left(-a^5b^3+3a^6b^2\right):\left(4a^4b^2\right)$.

310. 1) $\left(6a-8b+10\right):2$;
2) $\left(8x+12y-16\right):\left(-4\right)$;
3) $\left(10a^2-12ab+8a\right):\left(2a\right)$;
4) $\left(2ab+6a^2b^2-4b\right):\left(2b\right)$.

311. Упростите выражение:

1) $\left(6a^3-3a^2\right):a^2+\left(12a^2+9a\right):\left(3a\right)$;

2) $\left(8x^3-4x^2\right):\left(2x^2\right)-\left(4x^2-3x\right):x$;

3) $\left(3x^3-2x^2y\right):x^2-\left(2xy^2+x^2y\right):\left(\frac{1}{3}xy\right)$;

4) $\left(a^2b-3ab^2\right):\left(\frac{1}{2}ab\right)+\left(6b^3-5ab^2\right):b^2$.

312. Длина площадки, имеющей форму прямоугольника, в 1,5 раза длинее его ширины. Для рытья канала необходимо было уменьшить ее длину на 6 м, а ширину увеличить на 6 м. В результате ее площадь увеличилась на 84 м^2. Найдите первоначальную площадь и периметр площадки.

Проверьте себя!

1. Представьте выражение в виде степени:

$5^3\cdot5^2$; $3^8:3^6$; $(2^3)^4$; $3^5\cdot2^5$.

2. Упростите выражение: $(3b+c^2-d)-(c^2-2d)$.

3. Выполните действия:

$(-0,25a^3b^2c)\cdot(5abc)$; $(7m^2-20mn-10m):(10m)$.

4. Упростите выражение и найдите его числовое значение при $m=-0,25$:

$$2m(m-1)+(m-2)(m+2)+2m$$

Упражнения к главе III

313. Запишите:
1) квадрат числа m;
2) куб числа a;
3) квадрат суммы чисел c и 3;
4) сумму квадратов чисел c и 3.

314. Запишите:
1) квадрат разности чисел n и m;
2) разность квадратов чисел n и m;
3) куб разности чисел n и m;
4) разность кубов чисел $\frac{1}{2}$ и b.

315. Сторона квадрата равна c м. Найдите его периметр и площадь.

316. Длина стекла прямоугольной формы на 30 см длиннее его ширины. Для того чтобы вставить стекло в раму, от его ширины и длины отрезали по 10 см. Площадь отрезанных частей стекла равна 1400 см^2. Найдите первоначальные измерения стекла.

317. Одна сторона прямоугольника в 3 раза больше другой его стороны. Обозначив одну сторону через x, запишите формулу для его площади.

318. Разобьем куб с ребром 1 м на кубы с ребром 1 см. Какова высота столбика, составленного из этих кубов, положенных друг на друга?

319. Сердце человека бьется в среднем с частотой 75 ударов в минуту. Вычислите число ударов сердца за сутки.

320. Поднимет ли ученик куб объемом 1м^3, вырезанный из пенопласта (масса 1см^3 пенопласта 0,2 г)?

321. Запишите в стандартной форме следующие числа:
1) в 1м^3 газа при 0 °С и атмосферном давлении 760 мм ртутного столба заключено 27 000 000 000 000 000 000 молекул газа.

2) 1 парсек (принятая в астрономии единица длины) равен 30 800 000 000 000 км;

3) компьютер может совершать 1 000 000 операций в секунду.

322. Поверхность Земли составляет более 510 млн км^2. Объем Земли — более 1000 млрд км^3. Запишите эти числа в стандартной форме.

323. Один литр морской воды содержит около 0,00001 мг золота. Сколько золота содержится в 1 км^3 морской воды?

324. Запишите многочлен в стандартной форме:

1) $(2m)(4n)-3a(2b)-(0,2n)(5m)+b(5a)-5nm+8ab$;

2) $13ab-0,2xy-(2a)(5b)+(6x)(0,2y)+a(-3)b$;

3) $2abc5a+1\frac{5}{7}a^2\frac{7}{12}bc-2\frac{2}{3}ab\left(-\frac{3}{8}\right)a$;

4) $3nmk4n-\frac{3}{8}nm\,2\frac{2}{3}nk+\frac{2}{9}n^2m\left(-4\frac{1}{2}\right)k$.

325. Найдите значение выражения:

1) $-0,08x+73xy^2+27xy^2$, где $x=4, y=0,2$;

2) $-2a^2b+4b+11a^2b$, где $a=-\frac{1}{3}, b=2\frac{3}{4}$;

3) $5p^3-3p^2+11p-7p-6p^2-7p^2+p$, где $p=-1$;

4) $8x^2-7x^3+6x-5x^2+2x^3+3x^2-8x$, где $x=1$.

326. Найдите алгебраическую сумму многочленов:

1) $\left(-2x^3+xy^2\right)+\left(x^2y-1\right)+\left(x^2y-xy^2+3x^3\right)$;

2) $\left(3x^2+5xy+7x^2y\right)-\left(5xy+3x^2\right)-\left(7x^2y-3x^2\right)$;

3) $\left(8a^2-10ab-b^2\right)+\left(-6a^2+2ab-b^2\right)-\left(a^2-8ab+4b^2\right)$;

4) $\left(4a^2-2ab+b^2\right)-\left(-a^2+b^2-2ab\right)+\left(3a^2+b^2-ab\right)$.

№ 6 *Водитель автомобиля марки «Спарк» меняет колеса (ходовые и запасное) по схеме, показанной на рисунке стрелками. Оказалось, что через 30 000 км пробега все колеса износились одинаково. Сколько километров пробежало каждое колесо (рис. 18)?*

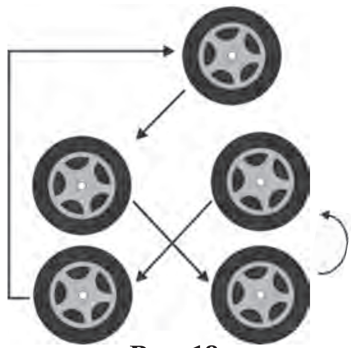


Рис. 18

Выполните умножение многочленов: **(327—328):**

327. 1) $(0{,}3x+0{,}3y-z)(x-z)$;
2) $(0{,}5x-0{,}5y+z)(x+y)$;
3) $\left(\frac{1}{4}m-\frac{1}{4}n+\frac{1}{5}p\right)(20m+8)$;
4) $(0{,}2a^2-0{,}4a+1)(5a^2-10)$.

328. 1) $(a-b)(a+b)(2a-3b)$;
2) $(a+b)(a-b)(2a+3b)$;
3) $(x+2)(3x+1)(2x-1)$;
4) $(x-3)(2x+1)(3x-1)$.

329. Выполните деление:

1) $(0{,}01a^4-0{,}2a^3+0{,}04a^2+0{,}002a):(0{,}01a)$;
2) $(-0{,}05x^5-0{,}08x^4-0{,}09x^3+0{,}01x^2):(-0{,}01x^2)$;
3) $\left(-4m^5n^2-\frac{4}{9}m^4n^5+\frac{2}{3}m^3n^6\right):\left(\frac{2}{3}m^3n^2\right)$;
4) $\left(\frac{3}{4}a^6x^3+\frac{6}{5}a^3x^4-\frac{9}{10}ax^5\right):\left(\frac{3}{5}ax^3\right)$.

Тестовые задания к главе III

1. Вычислите: $(3^3\cdot 9^5):81^3$.

A) 3; B) $\frac{1}{3}$; C) $\frac{1}{9}$; D) $\frac{1}{27}$.

2. Вычислите: $\dfrac{a^8(b^4)^4}{(b^2)^6\cdot(a^2)^3\cdot(ab)^2}$.

A) a^2b^2; B) b^2; C) a^2; D) $\dfrac{1}{b^2}$.

3. Найдите числовое значение одночлена:

$\dfrac{1}{5}a^2b^3c$, где $a=-2,\ b=-1,\ c=10$.

A) $-\dfrac{4}{5}$; B) $\dfrac{4}{5}$; C) -8; D) 8.

4. Запишите одночлен в стандартном виде: $2^4ab^2\left(-\dfrac{1}{2}\right)^3a^2b$.

A) $-2a^3b^3$; B) $\dfrac{4}{3}a^3b^3$; C) $-\dfrac{4}{3}b^3a^3$; D) $4a^3b^3$.

5. Выполните умножение одночленов: $\left(-\dfrac{7}{15}a^3b^2c^3\right)\left(\dfrac{9}{14}ab^2c\right)$.

A) $0,3a^3b^4c^4$; B) $-0,3(abc)^4$;

C) $-\dfrac{9}{15}a^4b^2c^3b^2$; D) $\dfrac{9}{15}a^4c^4b^3$.

6. Упростите выражение $3b^2a5ab-6b^24aba+ab4ab^2$, записав каждый член многочлена в стандартной форме:

A) 43 a^3b^3; B) $43a^2b^3$; C) $-5a^3b^2$; D) $-5a^2b^3$.

7. Найдите алгебраическую сумму многочленов:

$$\left(0,5a+\frac{2}{3}b\right)-\left(\frac{7}{2}a-\frac{1}{3}b\right)+2(a+b).$$

A) $a+3b$; B) $-a+3b$; C) $-a-3b$; D) $a-3b$.

8. Выполните умножение многочлена на одночлен:

$\left(4a-\dfrac{1}{3}x\right)\cdot(-3x)$.

A) $-12ax-3x^2$; C) $3x^2+12ax$; B) $3x^2-12ax$;

D) x^2-12ax.

9. Упростите: $5a(0,4a-b)-4a\left(\frac{1}{4}a-b\right)$.

A) $a(a-b)$; B) $a(a+b)$; C) a^2+9ab; D) $3a^2+9ab$.

10. Выполните умножение многочленов:

$$(a-b)(a+b)(a^2+b^2).$$

A) a^3-b^4; B) a^4+b^3; C) a^3-b^3; D) a^4-b^4.

11. Выполните деление: $(16a^3b^2-4a^2b^3+a^2b^2):(4a^2b^2)$.

A) $4a-b+\frac{1}{4}$; B) $4a+b+4$;

C) $4ab-\frac{1}{6}+4$; D) $4a-4b+4$.

12. Упростите выражение: $\left(18a^4+21a^2\right):\left(3a^2\right)-5a\left(2a+\frac{1}{a}\right)$.

A) $4a^2+2$; B) $16a^2+12$; C) $-4a^2+2$; D) $16a^2+2$.

13. Выполните умножение многочленов:

$$(a+2b)(a-2b)(a^2+4b^2).$$

A) a^4-16b^4; B) a^4-8b^3; C) a^3-8b^3; D) a^4+16b^4.

Вычислите: **(14—16):**

14. $(-0,2)^5:(-0,1)^4$.

A) $-3,2$; B) $3,2$; C) $0,00032$; D) $-0,00032$.

15. $-(-3)^3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^2$.

A) -3; B) 3; C) $-2,7$; D) $\frac{1}{9}$.

16. $(5,2)^3:(1,3)^2$.

A) 832; B) 8,32; C) 83,2; D) 5,2.

17. Выполните умножение многочлена на одночлен:

$$\left(\frac{18}{35}a^2-\frac{2}{7}ab+0{,}6b^2\right)\cdot(-35ab).$$

A) $-18a^3b+10a^2b^2-21ab^3$; B) $-18a^3b-10a^2b^2+21ab^3$;

C) $35a^3b-10ab-28ab^3$; D) $-18a^3-10ab+21a^2b^3$.

18. Вычислите: $\dfrac{(1{,}3)^6}{(1{,}69)^4}\cdot\dfrac{(5{,}2)^8}{(2{,}6)^6\cdot 2^{10}}$.

A) 4; B) 2,6; C) 1; D) 1,69.

Исторические сведения

Обозначение неизвестных величин буквами впервые встречается в трудах знаменитого древнегреческого математика Диофанта (III в.). Первым коэффициенты и известные величины стал обозначать буквами Ф. Виет.

Исследование алгебраических уравнений стало возможным только после введения буквенных коэффициентов. Ф. Виет обозначал прописными согласными латинскими буквами B, G, D, ... коэффициенты, а прописными гласными буквами A, E, I, ... — переменные.

Известный французский математик и философ Р. Декарт (1596–1650) для обозначения коэффициентов использовал строчные латинские буквы a, b, c, d, ..., а для обозначения неизвестных — последние буквы алфавита — x, y, z. Обозначения степени в современном виде a^2, a^3, ..., a^n также введены Декартом (1637).

1) $(10-x)x$;

2) $(10+x)(10+x)$;

3) $(10-x)(10-x)$;

4) $(10-x)(10+x)$;

5) $\left(10+\frac{x}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-5x\right)$;

6) $(10+x)(x-10)$;

7) $(100+x^2-20x)-(50+10x-2x^2)$;

8) $(100+x^2-20x)+(50+10x-2x^2)$.

Аль-Хорезми, Ахмад Фергани, Беруни, аль-Каши не использовали алгебраическую символику в своих трудах. Мавританский математик аль-Каласади (XV в.) использовал элементы алгебраической символики. Он обозначал первую степень неизвестного в уравнениях первой буквой слова *шай* (вещь), квадрат — первой буквой слова *мол* (имущество), куб — первой буквой слова *кааб*. Вместо равенства «=» он использовал букву *а* — первую букву слова *адала* (равенство).

Символика изучаемого нами курса алгебры сформировалась в XIV—XVII вв.

Решите уравнения аль-Хорезми:

1) $110-x+\frac{1}{3}\cdot(20+x)-x=4x$;

2) $300-x+\frac{4}{11}\cdot(100-10-x)-20=2x$;

3) $500-x+100-\frac{x}{5}-\frac{3}{4}x=2\cdot\left(100+x+\frac{3}{4}x\right)$;

4) $300-x-\frac{x}{3}+100-\frac{x}{3}x-\frac{x}{3}=4\cdot\left(x+\frac{x}{3}\right)$.

ГЛАВА IV

РАЗЛОЖЕНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ НА МНОЖИТЕЛИ

§ 19 Вынесение общего множителя за скобки

Задача 1. Сторона первого сада квадратной формы равна 427 м. К нему прилегает второй сад прямоугольной формы, ширина которого равна 427 м, а длина 573 м. Сколько гектаров составляет общая площадь двух садов (рис. 19)?

△ Если обозначить $a=427$ м, $b=573$ м, то искомая площадь составит $S=a^2+ab$ (м^2).

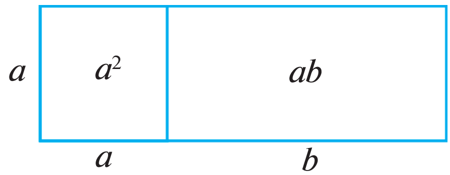


Рис. 19

Вычисления по этой формуле со значениями a и b занимает много времени. Но можно вычислить общую площадь садов S и как произведение $a\cdot(a+b)$, то есть $a^2+ab = a\cdot(a+b)$ (см. рисунок). Если заменить выражение a^2+ab равным ему выражением $a\cdot(a+b)$, то вычисления упростятся. Действительно,

$$a^2+ab=a\cdot(a+b)=427\cdot(427+573)=427\,000\ (\text{м}^2) = 42{,}7\ (\text{га}).$$

Ответ: 42,7 га. ▲

Представление многочлена в виде произведения двух или нескольких многочленов называется ***разложением на множители****.*

Разложением чисел на множители пользуются при сокращении дробей, приведении их к общему знаменателю и решении прочих подобных задач. При выполнении действий над алгебраическими выражениями также широко применяется разложение на множители.

Задача 2. Найти числовое значение выражения $ab + ac - ad$ при $a = 43$, $b = 26$, $c = 17$, $d = 23$.

△ Вычисления проведем следующим образом:

$43 \cdot 26 + 43 \cdot 17 - 43 \cdot 23 = 43 \cdot (26 + 17 - 23) = 43 \cdot 20 = 860$. ▲

Здесь мы используем распределительное свойство умножения:

$$ab + ac - ad = a(b + c - d).$$

В числовом выражении $43 \cdot 26 + 43 \cdot 17 - 43 \cdot 23$ общим множителем будет число 43, в алгебраическом выражении $ab + ac - ad$ общим множителем будет a.

Если все члены многочлена содержат общий множитель, числовой или буквенный, то этот множитель можно вынести за скобки.

В скобках остается многочлен, полученный от деления данного многочлена на этот общий множитель.

Задача 3. Разложить на множители многочлен:

$$6ab + 3b - 12bc.$$

△ Каждый член данного многочлена содержит общий множитель $3b$, т. к. $6ab = 3b \cdot 2a$, $3b = 3b \cdot 1$, $-12bc = 3b \cdot (4c)$.

Следовательно, $6ab + 3b - 12bc = 3b(2a + 1 - 4c)$. ▲

При известных обстоятельствах общий множитель можно выносить за скобки как со знаком «+», так и со знаком «–».

Приведем примеры:

1) $ab - b = b(a - 1) = - b(1 - a)$;

2) $4a^2b^3 - 6a^3b^2 = 2a^2b^2\ (2b - 3a)$ или
$4a^2b^3 - 6a^3b^2 = - 2a^2b^2\ (-2b + 3a) = - 2a^2b^2\ (3a - 2b)$.

Итак, чтобы разложить многочлен на множители вынесением общего множителя за скобки, нужно:

1) *найти этот общий множитель;*
2) *вынести его за скобки.*

Если коэффициенты членов многочлена — натуральные числа, то для нахождения общего множителя следует найти наибольший общий делитель коэффициентов членов многочлена, а среди степеней с одинаковым основанием — степень с наименьшим показателем. Например, разложим многочлен $28x^2b^3 - 21x^3b^2$ на множители и приведем к виду: $7x^2b^2(4b - 3x)$. Здесь число 7 НОД 28 и 21, x^2 и b^2 — степени с наименьшими x и b.

Чтобы узнать, верно ли многочлен разложен на множители, проверим умножением. Например, перемножив, получим: $7x^2b^2(4b - 3x) = 28x^2b^3 - 21x^3b^2$.

Правильность разложения многочлена на множители можно проверить умножением полученных множителей.

Например, выполнив умножение, получим:

$$7x^2b^2(4b - 3x) = 28x^2b^3 - 21x^3b^2.$$

Общий множитель может быть и многочленом, например:

1) $5(a + b) + x(a + b) = (a + b)(5 + x)$;

2) $3x(a - 2b) + 5y(a - 2b) + 2(a - 2b) = (a - 2b)(3x + 5y + 2)$.

В некоторых случаях полезно применить равенство $a - b = -(b - a)$. Например:

1) $(a - 3)x - (3 - a)y = (a - 3)x + (a - 3)y = (a - 3)(x + y)$;

2) $15a^2b(x^2 - y) - 20ab^2(x^2 - y) + 25ab(y - x^2) = 15a^2b(x^2 - y) - 20ab^2(x^2 - y) - 25ab(x^2 - y) = 5ab(x^2 - y)(3a - 4b - 5)$.

Упражнения

330. Разложите числа в произведения степеней простых чисел: 70, 121, 240, 168, 225.

331. Сократите дроби: $\frac{45}{60}$; $\frac{18}{24}$; $\frac{75 \cdot 15}{25 \cdot 24}$; $\frac{40 \cdot 14}{7 \cdot 15}$.

332. Примените распределительный закон умножения и вычислите:

1) $81 \cdot 17 - 15 \cdot 81$;

2) $24 \cdot 2{,}78 + 41 \cdot 2{,}78$;

3) $15 \cdot 17 + 15 \cdot 67$;

4) $14\frac{3}{8} \cdot 1\frac{1}{4} - 4\frac{3}{8} \cdot 1\frac{1}{4}$.

333. Запишите произведение в виде многочлена:

1) $(a+2)(a+3)$; 3) $3c^3(2c^3-5)$;

2) $2x(x-1)$; 4) $(a^2+b)(a-b^2)$.

334. От пристани A до пристани B отправилась моторная лодка со скоростью 20 км/ч. Через два часа после этого из A в B в путь отправилась вторая моторная лодка со скоростью 24 км/ч. Обе лодки прибыли к пристани B в одно и то же время. Найдите расстояние между A и B.

335. Докажите кратность выражения:

1) 3^6+3^4 на 30; на 90;

2) 7^8+7^6 на 49; на 350;

3) 11^8-11^6 і на 24; на 60.

Вынесите общий множитель за скобки **(336 — 344)**:

336. 1) $2m+2n$; 2) $3a-3x$; 3) $8-4x$; 4) $6a+12$.

337. 1) $9a+12b+3$; 3) $-10x+15y-5z$;

2) $8a-4b-2$; 4) $9x-3y+12z$.

338. 1) $ax-ay$; 2) $cd+bc$; 3) $xy+2x$; 4) $3x-xy$.

339. 1) $9mn+9n$; 2) $3bd-3ab$; 3) $11z-33yz$; 4) $6pk-3p$.

340. 1) $ab-ac+a^2$; 3) $6a^2-3a+12ba$;

2) $xy-x^2+xz$; 4) $4b^2+8ab-12a^2b$.

341. 1) a^4+2a^2; 3) $a^4b^2+ab^3$;

2) a^4-3a^3; 4) $x^2y^3-x^3y^2$.

342. 1) $18y^7+12y^4$; 3) $15x^5-5x^3$;

2) $6x^4-24x^2$; 4) $6a^5+3a^2$.

343. 1) $9a^2b^2-12ab^3$; 3) $7a^2bc+14ab^2c$;

2) $20x^3y^2+4x^2y$; 4) $9xyz^2-12xy^2z$.

344. 1) $6y^5+12y^4-3y^3$; 2) $20a^4-5a^3+15a^5$; 3) $4a^2b^2+36a^2b^3+6ab^4$; 4) $2x^2y^4-2x^4y^2+6x^3y^3$.

345. Вычислите:

1) $137^2+137\cdot 63$; 2) $187^2-187\cdot 87$; 3) $0,7^3+0,7\cdot 9,51$; 4) $0,9^3-0,81\cdot 2,9$.

Разложите на множители **(346—349):**

346. 1) $a(m+n)+b(m+n)$; 2) $b(a+5)-c(a+5)$; 3) $a(b-5)-(b-5)$; 4) $(y-3)+b(y-3)$.

347. 1) $2a(a-b)+3b(a-b)$; 2) $3n(m-3)+5m(m-3)$; 3) $5a(x+y)-4b(x+y)$; 4) $7a(c-d)-2b(c-d)$.

348. 1) $a^2(x-y)+b^2(x-y)$; 2) $a^2(x+y)-b^2(x+y)$; 3) $a(x^2+y^2)-b(x^2+y^2)$; 4) $x(a^2-2b^2)+y(a^2-2b^2)$.

349. 1) $2b(x-1)-3a(x-1)+c(x-1)$;

2) $c(p-q)-a(p-q)+d(p-q)$;

3) $x(a^2+b^2)+y(a^2+b^2)-z(a^2+b^2)$;

4) $m(x^2+1)-n(x^2+1)-l(x^2+1)$.

Разложите на множители **(350—352):**

350. 1) $c(a-b)+b(b-a)$; 2) $a(b-c)-c(c-b)$; 3) $(x-y)+b(y-x)$; 4) $2b(x-y)-(y-x)$.

351. 1) $7(y-3)-a(3-y)$; 2) $6(a-2)+a(2-a)$; 3) $b^2(a-1)-c(1-a)$; 4) $a^2(m-2)+b(2-m)$.

352. 1) $a(b-c)+b^2(b-c)-7(c-b)$;

2) $x(x-y)+y(y-x)-3(x-y)$;

3) $x(a-2)+y(2-a)+(2-a)$;

4) $a(b-3)+(3-b)-b(3-b)$.

353. Решите уравнение:

1) $8-(x-3)(x+3)=10-(x-1)^2$; 3) $x:15=2\frac{1}{12}:14,5$;

2) $(2x+1)^2-(2x-3)^2=4(7x-5)$; 4) $\frac{x}{2,3}=\frac{2,1}{9\frac{6}{7}}$.

354. Собака гонится за лисицей. Собака бежит со скоростью 8 м/с, а лисица — 6 м/с. Первоначально расстояние между ними составляло 360 м, но лисице до ее норы оставалось пробежать еще 1 км. Успеет ли лисица добежать до норы?

§ 20 Способ группировки

Способ группировки применяют к многочленам, которые не имеют общего множителя для всех членов многочлена. Иногда удается определить общий множитель, заключив несколько членов данного многочлена в скобки. Способ группировки основан на применении переместительного, сочетательного и распределительного законов сложения и умножения.

Рассмотрим примеры:

1) $a(b+c)+b+c=a(b+c)+(b+c)=(b+c)(a+1)$;

2) $a(b-c)-b+c=a(b-c)-(b-c)=(b-c)(a-1)$.

В первом примере было достаточно заключить в скобки последние два члена, во втором примере — последние два члена многочлена, поставив перед скобкой знак «−».

3) $m(3x-y)+3nx-ny=m(3x-y)+(3nx-ny)=$
$=m(3x-y)+n(3x-y)=(3x-y)(m+n)$;

4) $-mx^2-my^2+n(x^2+y^2)=(-mx^2-my^2)+n(x^2+y^2)=$
$=-m(x^2+y^2)+n(x^2+y^2)=(x^2+y^2)(n-m)$.

В третьем и четвертом примерах, кроме группировки слагаемых по два, из каждой группы были вынесены за скобки общие множители: в первом случае со знаком «+», во втором — со знаками «–» и «+».

Иногда группировку членов многочлена можно разложить различными способами. Например, разложение многочлена $2am + 2an - 3bm - 3bn$ на множители можно выполнить так:

I способ

$$2am + 2an - 3bm - 3bn =$$
$$= (2am + 2an) - (3bm + 3bn) =$$
$$= 2a(m + n) - 3b(m + n) =$$
$$= (m + n)(2a - 3b).$$

II способ

$$2am + 2an - 3bm - 3bn =$$
$$= (2am - 3bm) + (2an - 3bn) =$$
$$= m(2a - 3b) + n(2a - 3b) =$$
$$= (2a - 3b)(m + n).$$

Рассмотрим пример разложения на множители многочлена, состоящего из шести членов:

$$ax + bx - ay - by + az + bz = (ax + bx) - (ay + by) + (az + bz) =$$
$$= x(a + b) - y(a + b) + z(a + b) = (a + b)(x - y + z).$$

Здесь члены многочлена сгруппированы по два, можно сгруппировать их по три:

$$ax + bx - ay - by + az + bz = (ax - ay + az) + (bx - by + bz) =$$
$$= a(x - y + z) + b(x - y + z) = (a + b)(x - y + z).$$

Итак, чтобы разложить многочлен на множители способом группировки, нужно:

1) объединить члены многочлена в такие группы, которые имеют общий множитель в виде многочлена;

2) вынести этот общий множитель за скобки.

Разложите на множители **(355—360)**:

355. 1) $a+b+c(a+b)$;
2) $m-n+p(m-n)$;
3) $x+3a(x+y)+y$;
4) $x+2a(x-y)-y$.

356. 1) $(x+y)+(x+y)^{2;}$
2) $(a-b)^2+a-b$;
3) $2m(m-n)+(m-n)^2$;
4) $4q(p-1)+(p-1)^2$.

357. 1) $2m(m-n)+m-n$;
2) $4q(p-1)+p-1$;
3) $2m(m-n)-n+m$;
4) $4q(p-1)+1-p$.

358. 1) $a(x-c)+bc-bx$;
2) $a(b+c)+db+dc$;
3) $3a(2b+c)+8b+4c$;
4) $2x(3x-4y)-6x+8y$.

359. 1) $ac+bc-2ad-2bd$;
2) $ac-3bd+ad-3bc$;
3) $2bx-3ay-6by+ax$;
4) $5ay-3bx+ax-15by$.

360. 1) $xy^2-by^2-ax+ab+y^2-a$;
2) $ax^2-ay-bx^2+cy+by-cx^2$.

361. Вычислите:

1) $139\cdot 15+18\cdot 139+15\cdot 261+18\cdot 261$;
2) $125\cdot 48-31\cdot 82-31\cdot 43+125\cdot 83$;
3) $14,7\cdot 13-2\cdot 14,7+13\cdot 5,3-2\cdot 5,3$;
4) $3\frac{1}{3}\cdot 4\frac{1}{5}+4,2\cdot\frac{2}{3}+3\frac{1}{3}\cdot 2\frac{4}{5}+2,8\cdot\frac{2}{3}$.

362. Найдите значение выражения:

1) $5a^2-5ax-7a+7x$, при $x=-3,\ a=4$;
2) $m^2-mn-3m+3n$, при $m=0,5,\ n=0,25$;
3) $a^2+ab-5a-5b$, при $a=6,6,\ b=0,4$;
4) $a^2-ab-2a+2b$, при $a=\frac{7}{20},\ b=0,15$.

363. Вычислите:

1) $287^2 - 287 \cdot 48 + 239 \cdot 713$;

2) $73{,}4^2 + 73{,}4 \cdot 17{,}2 - 90{,}6 \cdot 63{,}4$.

364. Решите уравнение:

1) $x(x-4)+x-4=0$; 2) $t(t+7)-4t-28=0$.

№ 7 *Масса Али и Вали вместе равна массе пяти арбузов. Масса Вали в 4 раза больше одной дыни. Масса Вали и двух дынь равна массе трех арбузов. Массе скольких дынь равна масса Али?*

§ 21 Квадрат суммы, квадрат разности

Рассмотрим квадрат суммы двух чисел $(a+b)^2$. Пользуясь правилом умножения многочлена на многочлен, получаем:

$$(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+ab+ab+b^2=a^2+2ab+b^2,$$

т.е.

$$\boxed{(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.} \qquad (1)$$

Квадрат суммы двух чисел равен квадрату первого числа плюс удвоенное произведение первого числа на второе плюс квадрат второго числа.

Заметим, что формулу (1) можно получить, рассматривая площадь квадрата, изображенного на рис. 20.

Рассмотрим теперь квадрат разности двух чисел:

$$(a-b)^2=(a-b)(a-b)=a^2-ab-ab+b^2=a^2-2ab+b^2,$$

т.е.

$$\boxed{(a-b)^2=a^2-2ab+b^2.} \qquad (2)$$

Квадрат разности двух чисел равен квадрату первого числа минус удвоенное произведение первого числа на второе плюс квадрат второго числа.

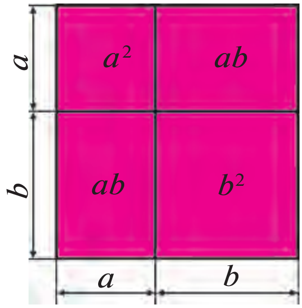


Рис. 20

В равенствах (1) и (2) a и b — любые числа или алгебраические выражения, например:

1) $(2m+3k)^2=(2m)^2+2\cdot2m\cdot3k+(3k)^2=4m^2+12mk+9k^2$;

2) $(5a^2-3)^2=(5a^2)^2-2\cdot5a^2\cdot3+3^2=25a^4-30a^2+9$;

3) $(-a-3b)^2=((-1)\,(a+3b))^2=(-1)^2\,(a+3b)^2=$
$=(a+3b)^2=a^2+2a\cdot3b+(3b)^2=a^2+6ab+9b^2$.

Промежуточный результат можно не писать, производя необходимые вычисления устно. Например, можно сразу написать:

$$(5a^2-7b^2)^2=25a^4-70a^2b^2+49b^4.$$

Формулы квадрата суммы (1) и квадрата разности (2) называют также *формулами сокращенного умножения* и применяют в некоторых случаях для упрощения вычислений, например:

1) $99^2=(100-1)^2=10\,000-200+1=9801$;

2) $52^2=(50+2)^2=2500+200+4=2704$.

Формула (1) применяется также для приближенных вычислений значений выражения $(1+a)^2$. Если модуль числа a мал по сравнению с единицей (например, $a=0{,}0032$ или $a=-0{,}0021$), то число a^2 тем более мало и поэтому равенство $(1+a)^2=1+2a+a^2$ можно заменить приближенным равенством $(1+a)^2\approx1+2a$. Например:

1) $(1{,}002)^2 = (1 + 0{,}002)^2 \approx 1 + 2 \cdot 0{,}002 = 1{,}004$;

2) $(0{,}997)^2 = (1 - 0{,}003)^2 \approx 1 - 2 \cdot 0{,}003 = 0{,}994$.

Формулы квадрата суммы и квадрата разности иногда применяются к разложению многочленов на множители, например:

1) $x^2 + 10x + 25 = x^2 + 2 \cdot 5 \cdot x + 5^2 = (x+5)^2$;

2) $a^4 - 8a^2b^3 + 16b^6 = (a^2)^2 - 2 \cdot a^2 \cdot 4b^3 + (4b^3)^2 = (a^2 - 4b^3)^2$.

Задача. Доказать формулу:

$$\boxed{(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.} \qquad (3)$$

○ $(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2 = (a+b)(a^2 + 2ab + b^2) =$

$= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. ●

Аналогично доказывается формула

$$\boxed{(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3} \qquad (4)$$

*Формулы (3) и (4) называют **формулами куба суммы и куба разности**. Они также считаются формулами сокращенного умножения.*

Упражнения

Представьте квадрат двучлена в виде многочлена **(365—372)**:

365. 1) $(c+d)^2$; 3) $(2+x)^2$; 5) $(y+3)^2$;
2) $(x-y)^2$; 4) $(x+1)^2$; 6) $(7+m)^2$.

366. 1) $(m-2)^2$; 3) $(7-m)^2$; 5) $\left(a+\frac{1}{3}\right)^2$;
2) $(x-3)^2$; 4) $(y-6)^2$; 6) $\left(b+\frac{1}{2}\right)^2$.

367. 1) $(q+2p)^2$; 2) $(3x+2y)^2$; 3) $(6a-4b)^2$; 4) $(5z-t)^2$.

368. 1) $(3a^2+1)^2$; 2) $(a^2+1)^2$; 3) $(2x^2+3n^2)^2$; 4) $(x^2+y^2)^2$.

369. 1) $\left(m-\frac{1}{5}\right)^2$; 2) $\left(a-\frac{1}{3}\right)^2$; 3) $\left(\frac{a}{2}-\frac{b}{3}\right)^2$; 4) $\left(\frac{x}{3}+\frac{y}{4}\right)^2$.

370. 1) $(0,2x+0,3y)^2$; 3) $\left(\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{4}\right)^2$;

2) $(0,4b-0,5c)^2$; 4) $\left(\frac{1}{4}a^3-\frac{4}{5}\right)^2$.

371. Каков геометрический смысл выражения

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3?$$

Поставьте вместо точек нужные слова:
Построим ... , длины, ребер которых равны a и b.
Построим ... , измерения которых равны $a\times a\times b$ и $a\times b\times b$.. Сложим их так, чтобы получить ... .

372. 1) $(-4ab-5a^2)^2$; 3) $(0,2x^2+5xy)^2$;

2) $(-3b^2-2ab)^2$; 4) $(4xy+0,5y^2)^2$.

Выполните действия, используя формулы сокращенного умножения **(373—375)**:

373. 1) $(90-1)^2$; 2) $(40+1)^2$; 3) 101^2; 4) 98^2.

374. 1) 999^2; 2) 1003^2; 3) 51^2; 4) 39^2.

375. 1) 72^2; 2) 57^2; 3) 997^2; 4) 1001^2.

Упростите выражение **(376—377):**

376. 1) $(x-y)^2+(x+y)^2$; 3) $(2a+b)^2-(2a-b)^2$;

2) $(x+y)^2-(x-y)^2$; 4) $(2a+b)^2+(2a-b)^2$.

377. 1) $(a+b)^3+(a-b)^3$; 2) $3(2-a)^2+4(a-5)^2$;

3) $(x-1)^3-(x+1)^3$; 4) $-(3+x)^2+5(1-x)^2$.

Решите уравнение **(378—379):**

378. 1) $16x^2-(4x-5)^2=15$; 3) $-5x(x-3)+5(x-1)^2=-20$;

2) $64x^2-(3-8x)^2=87$; 4) $(2x-3)^2-(2x+3)^2=12$.

379. 1) $(3x-1)^2-(3x-2)^2=0$;

2) $(y-2)(y+3)-(y-2)^2=5$;

3) $(x+3)(x+7)-(x+4)^2=0$;

4) $(y+8)^2-(y+9)(y-5)=117$.

380. Найдите значение выражения:

1) $9a^3-a(3a+2)^2+4a(3a+7)$, при $a=-1\frac{1}{6}$;

2) $(2y-5)^2-4(y-3)^2-4y$, при $y=-\frac{2}{7}$;

3) $25m(m-1)-(5m-3)^2-6m$, при $m=-0,3$;

4) $24x^2-(7x-2)^2+(5x-3)(5x+1)$, при $x=-\frac{5}{9}$.

381. Замените x таким одночленом, чтобы в результате получилось верное равенство:

1) $(x-4b^7)^2=25a^4b^2-40a^2b^8+16b^{14}$;

2) $(x+7c)^2=25b^6+70b^3c+49c^2$;

3) $(2a+x)^3=8a^3+12a^2b+6ab^2+b^3$;

4) $(5b^2-x)^2=25b^4-30a^2b^3+9a^4b^2$.

382. Представьте выражение в виде квадрата двучлена:

1) $a^2-10ab+25b^2$; 3) k^4+2k^2+1;

2) $25+10x+x^2$; 4) $p^2-1,6p+0,64$.

383. Замените x таким одночленом, чтобы в результате получилось верное равенство:

1) a^2+4a+x;
2) $p^2-0{,}5p+x$;
3) $36a^2-x+49b^2$;
4) $a^2-6ab+x$.

384. При каком значении a данное выражение можно представить в виде квадрата двучлена:

1) $(3x-5)^2+(4x+12)^2+ax$;

2) $(17x+10)^2-(15x-8)^2+ax$?

385. Докажите:

1) $(a-b)^2=(b-a)^2$;
2) $(-a-b)^2=(b+a)^2$;
3) $(-a-b)(a+b)=-(a+b)^2$;
4) $(a-b)^3=-(b-a)^3$;
5) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$;
6) $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$.

§ 22 Формула разности квадратов

Умножим сумму двух чисел на их разность:

$$(a+b)(a-b)=a^2-ab+ab-b^2=a^2-b^2,$$

т.е.

$$\boxed{(a+b)(a-b)=a^2-b^2.} \qquad (1)$$

$$\boxed{a^2-b^2=(a-b)(a+b).} \qquad (2)$$

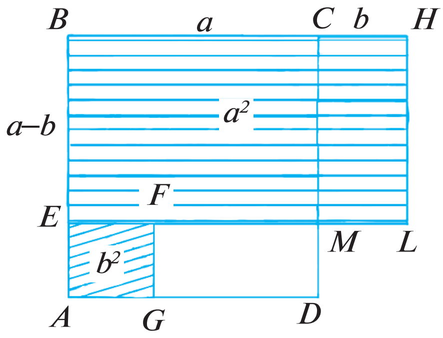
Разность квадратов двух чисел равна произведению разности этих чисел и их суммы.

В равенствах (1) и (2) a, b — любые числа или алгебраические выражения, например:

1) $(nm+3k)(nm-3k)=n^2m^2-9k^2$;

2) $4a^4b^2-25a^2b^4=(2a^2b+5ab^2)(2a^2b-5ab^2)$;

3) $(a+b)^2-16=(a+b-4)(a+b+4)$.



$S_{ABCD} = a^2$;
$S_{AEFG} = b^2$;
$S_{GFEBCD} = S_{EBHL}$;
$S_{GFEBCD} = a^2 - b^2$;
$S_{EBHL} = (a - b)(a + b)$.

Геометрический смысл формулы (2).

Формула (1) называется *формулой сокращенного умножения. Она применяется для упрощения вычислений.*

Например:

1) $63 \cdot 57 = (60+3)(60-3) = 3\,600 - 9 = 3\,591$;

2) $98 \cdot 102 = (100-2)(100+2) = 100^2 - 2^2 = 10\,000 - 4 = 9\,996$.

Формулу (2) называют *формулой разности квадратов*. Она применяется к разложению многочленов на множители.

Например:

1) $a^2 - 9 = a^2 - 3^2 = (a-3)\,(a+3)$;

2) $4b^4 - 0{,}64c^2 = (2b^2)^2 - (0{,}8c)^2 = (2b^2 - 0{,}8c)\,(2b^2 + 0{,}8c)$;

3) $(a-b)^2 - 1 = (a-b-1)\,(a-b+1)$;

4) $(a+b)^2 - (a-c)^2 = (a+b-a+c)(a+b+a-c) =$
$= (b+c)(2a+b-c)$.

Упражнения

Выполните умножение, воспользовавшись формулой (1) **(386—394):**

386. 1) $(c+d)(c-d)$; 3) $(a+c)(c-a)$;
2) $(p+q)(p-q)$; 4) $(m-n)(m+n)$.

387. 1) $(x+5)(x-5)$;
2) $(a+3)(a-3)$;
3) $(a-4)(4+a)$;
4) $(7+x)(x-7)$.

388. 1) $(2b+a)(2b-a)$;
2) $(c+3d)(c-3d)$;
3) $(y+6x)(6x-y)$;
4) $(3m-2n)(2n+3m)$.

389. 1) $\left(4d-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+4d\right)$;
2) $\left(\frac{5}{6}a-b\right)\left(b+\frac{5}{6}a\right)$;
3) $\left(\frac{1}{2}y-\frac{1}{3}x\right)\left(\frac{1}{2}y+\frac{1}{3}x\right)$;
4) $\left(\frac{2}{3}m+\frac{3}{4}n\right)\left(\frac{2}{3}m-\frac{3}{4}n\right)$.

390. 1) $(c^2+d^2)(c^2-d^2)$;
2) $(a^2+b^3)(a^2-b^3)$;
3) $(x^4-y^3)(y^3+x^4)$;
4) $(m^3-n^3)(m^3+n^3)$.

391. 1) $(3a^2+4b^3)(3a^2-4b^3)$;
2) $(2m^4-5n^2)(5n^2+2m^4)$;
3) $(0,2t^3+0,5p^4)(0,5p^4-0,2t^3)$;
4) $(1,2a^2-0,3b^2)(1,2a^2+0,3b^2)$.

392. 1) $\left(\frac{3}{4}a^2-\frac{1}{2}b^3\right)\left(\frac{1}{2}b^3+\frac{3}{4}a^2\right)$;
2) $\left(\frac{2}{3}x^4-\frac{4}{5}y^5\right)\left(\frac{2}{3}x^4+\frac{4}{5}y^5\right)$;
3) $\left(0,5q+\frac{1}{3}p^2\right)\left(0,5q-\frac{1}{3}p^2\right)$;
4) $\left(1,5c^2-\frac{3}{4}b\right)\left(\frac{3}{4}b+1,5c^2\right)$.

393. 1) $(3x^2y-4xy^2)(3x^2y+4xy^2)$;
2) $(5ab^2+2a^2b)(5ab^2-2a^2b)$;
3) $(7ab+x^2y^3)(7ab-x^2y^3)$;
4) $(ab^3-4xy)(ab^3+4xy)$.

394. 1) $(3+x)(3-x)(9+x^2)$;
2) $(x^2+1)(x+1)(x-1)$;
3) $(4x^2+y^2)(2x+y)(2x-y)$;
4) $(3a-2b)(3a+2b)(9a^2+4b^2)$.

Вычислите, используя формулы сокращенного умножения **(395—396):**

395. 1) $48\cdot52$; 2) $68\cdot72$; 3) $43\cdot37$; 4) $47\cdot53$.

396. 1) $27\cdot33$; 2) $44\cdot36$; 3) $84\cdot76$; 4) $201\cdot199$.

397. Упростите:

1) $(c-3)^2-(c+3)(3-c)$;

2) $(a+2)^2-(a+2)(2-a)$;

3) $(2x+3y)(2x-3y)+(2x+3y)^2$;

4) $(3a-4b)(3a+4b)-(3a-4b)^2$;

5) $(-b-a)(a+b)+a^2+b^2$;

6) $(b-a)(-a-b)+2b^2$.

398. Найдите значение выражения:

1) $4m-(m+3)^2+(m-3)(m+3)$, при $m=-2,4$;

2) $(3x+4)^2-10x-(x-4)(4+x)$, при $x=-0,1$;

3) $2(k-7)(k+5)-(k-5)^2-(k-7)(7+k)$, при $k=-\frac{1}{2}$;

4) $(a+3)^2+(a-3)(3+a)-2(a+2)(a-4)$, при $a=-\frac{1}{5}$.

399. Решите уравнение:

1) $(2x+3)^2-4(x-1)(x+1)=49$;

2) $(3x+4)^2-(3x-1)(1+3x)=49$;

3) $x^3+2x^2-9x-18=0$;

4) $y^3-3y^2-4y+12=0$.

400. Две противоположные стороны квадрата увеличили на 8 см каждую, а оставшиеся две стороны на столько же уменьшили. Как изменилась площадь фигуры?

401. Вычислите: $\dfrac{5^4\cdot 0,128-5^3\cdot 0,628\cdot 5}{125\cdot 0,25}$.

§ 23 Применение нескольких способов разложения многочлена на множители

При разложении многочленов на множители иногда используется не один, а несколько способов.

Приведем примеры.

1) Разложим на множители многочлен a^3-a:

$$\triangle\ a^3-a=a\left(a^2-1\right)=a(a-1)(a+1).\ \blacktriangle$$

Здесь были использованы два способа: вынесение общего множителя за скобки и применение формулы разности квадратов.

2) Разложим на множители многочлен $(a^2+1)^2-4a^2$:

$$\triangle\ \left(a^2+1\right)^2-4a^2=\left(a^2+1\right)^2-(2a)^2=\left(\left(a^2+1\right)-2a\right)\left(\left(a^2+1\right)+2a\right)=$$
$$=\left(a^2+1-2a\right)\left(a^2+1+2a\right)=\left(a^2-2a+1\right)\left(a^2+2a+1\right)=$$
$$=(a-1)^2(a+1)^2.\ \blacktriangle$$

Здесь сначала использовалась формула разности квадратов, так как слагаемые не имели общих множителей, а затем были применены формулы квадрата суммы и разности.

3) $$\triangle\ 4x^2-y^2+4x+2y=\left(4x^2-y^2\right)+(4x+2y)=$$
$$=(2x-y)(2x+y)+2(2x+y)=(2x+y)(2x-y+2).\ \blacktriangle$$

Так как одночлены не имеют общих множителей и неясно, какую формулу можно использовать, вначале был использован способ группировки, а затем формула разности квадратов.

Эти примеры показывают, что при разложении многочленов на множители полезно соблюдать следующий порядок:

1) вынести общий множитель за скобку (если он есть);

2) попробовать разложить многочлен на множители по формулам сокращенного умножения;

3) попытаться применить способ группировки (если предыдущие способы не привели к цели).

Задача. Доказать равенство:

$$\boxed{a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right).} \qquad (1)$$

○ Преобразуем правую часть равенства:

$$(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)=a^3-a^2b+ab^2+a^2b-ab^2+b^3=a^3+b^3.$$

Правая часть равенства оказалась равной левой части, т. е. равенство (1) доказано. ●

Аналогично доказывается равенство

$$\boxed{a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)} \qquad (2)$$

Равенства (1) и (2) называют **формулами суммы и разности кубов.** Иногда эти формулы применяются при разложении многочленов на множители.

Например:

1) $27+b^3=3^3+b^3=(3+b)\left(9-3b+b^2\right)$;

2) $x^4-8xy^3=x\left(x^3-8y^3\right)=x\left(x^3-(2y)^3\right)=x(x-2y)\left(x^2+2xy+4y^2\right)$.

Упражнения

402. Вычислите:

1) 47^2-37^2; 2) 54^2-44^2;

3) $50{,}7^2-50{,}6^2$; 4) $29{,}4^2-29{,}3^2$.

403. (Устно.) Разложите на множители:

1) $36-x^2$; 2) a^2-25; 3) y^2-1; 4) $1-b^2$.

404. 1) Что можно сказать об этих равенствах

1) $(a+2b)^2 = a^2 + 4b^2$; 2) $(2a-3b)^2 = 4a^2 - 9b^2$

a) для каких a и b они верны, а для каких не верны? *b*) Используете ли вы возможность их равенства для любых a и b? ?

Разложите на множители **(405—416):**

405. 1) $25x^2 - 9$; | 2) $4a^2 - 9$; | 3) $64y^2 - 36x^2$; | 4) $81a^2 - 16b^2$.

406. 1) $c^2d^2 - 9$; | 2) $a^2b^2 - 16$; | 3) $4a^2 - 9b^2$; | 4) $16x^2 - 25y^2$.

407. 1) $\frac{1}{9}y^2 - \frac{16}{25}x^2$; 3) $0,25a^2 - 49b^2$;

2) $\frac{4}{9}a^2 - \frac{1}{16}b^2$; 4) $0,09x^2 - 16y^2$.

408. 1) $36x^2y^2 - 1$; | 2) $x^2y^4 - 16$; | 3) $81a^6 - 49b^4$; | 4) $25a^2 - 9b^6$.

409. 1) $a^4 - b^4$; 2) $a^4 - b^8$; 3) $a^4 - 16$; 4) $b^4 - 81$.

410. 1) $(a+b)^2 - c^2$; 3) $(a+2b)^2 - 9a^2$;

2) $(m-n)^2 - k^2$; 4) $(3x-y)^2 - 4y^2$.

411. 1) $(a+b)^2 - (a-c)^2$; 3) $(2a+b)^2 - (2b+a)^2$;

2) $(a+b)^2 - (b+c)^2$; 4) $(a-3b)^2 - (3a+b)^2$.

412. 1) $9a^2 - 6a + 1$; 3) $36b^2 + 12b + 1$;

2) $1 + 2c + c^2$; 4) $81 - 18x + x^2$.

413. 1) $9x^2 + 24x + 16$; 3) $36m^2 + 12mn + n^2$;

2) $100 - 60a + 9a^2$; 4) $a^2 + 10ab + 25b^2$.

414. 1) $x^4 + 2x^2y + y^2$; 3) $4c^4 + 12c^2b^3 + 9b^6$;

2) $p^4 - 2p^2q + q^2$; 4) $25a^6 + 30a^3b + 9b^2$.

415. 1) $a^4 - 8a^2 + 16$; 3) $25a^4 - 10a^2b + b^2$;

2) $b^4 - 18b^2 + 81$; 4) $16 - 8a^2b^2 + a^4b^4$.

416. 1) $-a^2-2a-1$;

2) $-9+6b-b^2$;

3) $-2a^2+8ab-8b^2$;

4) $-12ab-3a^2-12b^2$.

417. Найдите числовое значение выражения:

1) $5m^2-10mn+5n^2$, при $m=142$, $n=42$;

2) $6m^2+12mn+6n^2$, при $m=56$, $n=44$;

3) $-36a^3+4a^2b-\frac{1}{9}ab^2$, при $a=4$, $b=48$;

4) $-64a^3-8a^2b-\frac{1}{4}ab^2$, при $a=-6$, $b=84$.

418. Решите уравнение:

1) $x^2-36=0$;

2) $\frac{1}{4}-x^2=0$;

3) $4x^2+4x+1=0$;

4) $25-10x+x^2=0$.

419. Вычислите:

1) $101^2-202\cdot81+81^2$;

2) $37^2+126\cdot37+63^2$;

3) $\frac{48^2+2\cdot48\cdot18+18^2}{48^2-18^2}$;

4) $\frac{85^2-17^2}{85^2+2\cdot85\cdot17+17^2}$.

420. Впишите вместо точек такой трехчлен, чтобы выполнялось равенство:

1) $x^3+y^3=(x+y)(\ldots)$;

2) $(x+y)^3=(x+y)(\ldots)$;

3) $x^3-y^3=(x-y)(\ldots)$;

4) $(x-y)^3=(x-y)(\ldots)$.

421. Разложите на множители:

1) x^3-y^3;

2) c^3+d^3;

3) x^3+27;

4) a^3-27;

5) n^3-64;

6) a^3+1;

7) $1-p^3$;

8) $125-b^3$.

Разложите на множители: **(422—424):**

422. 1) $27m^3-8$; | 2) $64-125y^3$; | 3) $125+\frac{1}{8}b^3$; | 4) $64y^3+\frac{1}{27}$.

423. 1) $8a^3+1$;

2) $1+27b^3$;

3) $\frac{1}{27}a^3+64b^6$;

4) $\frac{1}{8}a^6+125b^3$.

424. 1) $a^9 - b^3$; 2) $a^6 - b^6$; 3) $x^6 - 729$; 4) $64 - y^6$.

Воспользовавшись формулами сокращенного умножения, запишите выражение в виде двучлена **(425—426):**

425. 1) $(z+5)(z^2-5z+25)$; 3) $(2x+3y)(4x^2-6xy+9y^2)$;

2) $(y+2)(y^2-2y+4)$; 4) $(4c-5d)(16c^2+20cd+25d^2)$.

426. 1) $(10a^2-1)(100a^4+10a^2+1)$;

2) $(a^2b^2-5a)(a^4b^4+5a^3b^2+25a^2)$;

3) $\left(\frac{1}{5}m-n\right)\left(\frac{1}{25}m^2+\frac{1}{5}mn+n^2\right)$;

4) $\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y\right)\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{6}xy+\frac{1}{9}y^2\right)$.

427. Разложите на множители:

1) $(8a^3-27b^3)-2a(4a^2-9b^2)$; 3) $(a^3+b^3)+(a+b)^2$;

2) $(64a^3+125b^3)+5b(16a^2-25b^2)$; 4) $(a^3-b^3)+(a-b)^2$.

428. Вычислите:

1) $\dfrac{258^3-147^3}{258^2+258\cdot147+147^2}$; 2) $\dfrac{17,98^2-17,98\cdot32,02+32,02^2}{17,98^3+32,02^3}$.

429. Впишите в скобки такие числа и буквы, чтобы полученное выражение было верно для любых значений x:

1) $(4x-7)^2+(3x+6)^2-(...-...)^2$;

2) $(17x-2)^2-(15x-6)^2-(...+...)^2$.

430. Решите уравнение:

1) $(x+2)(x^2-2x+4)-x(x-3)(x+3)=26$;

2) $(x-3)(x^2+3x+9)-x(x+4)(x-4)=21$;

3) $(2x-1)(4x^2+2x+1)-4x(2x^2-3)=23$;

4) $(4x+1)(16x^2-4x+1)-16x(4x^2-5)=17$.

Разложите на множители **(431—434):**

431. 1) $3a^3-3$; 2) y^3-y; 3) m^3n-mn^3; 4) $2a^3-2ab^2$.

432. 1) $x^4y^2-x^2y^4$; 2) $7c^2d^2-63c^2b^2$; 3) $8-72x^6y^2$; 4) $32a^4b-2a^2b$.

433. 1) $2a^2+4ab+2b^2$; 2) $2m^2+2n^2-4mn$; 3) $5x^2+10xy+5y^2$; 4) $8p^2-16p+8$; 5) $27a^2b^2-18ab+3$; 6) $12m^5n+24m^4n+12m^3n$.

434. 1) $2c^3+2d^3$; 2) $54x^3-16$; 3) $2cd^3-16c^4$; 4) $\frac{1}{8}a^2-a^5$; 5) $7x^2-56x^2y^3$; 6) $4a^2b+32a^5b$.

435. Вычислите: $19{,}7^2-8{,}3^2+28\cdot 8{,}6$.

436. Докажите, что: 1) если n — нечетное число, то выражение $(n+2)^2-1$ делится на 8;
2) если n — любое натуральное число, то выражение n^3+12n^2+23n делится на 6.

Разложите на множители **(437—438):**

437. 1) $(a^2+2ab+b^2)-c^2$; 2) $1-(x^2-2xy+y^2)$; 3) $1-a^2-2ab-b^2$; 4) $4+(-x^2-2xy-y^2)$.

438. 1) a^2-b^2+a+b; 2) a^2-b^2-a-b; 3) $x-y-x^2+y^2$; 4) x^3+x^2-x-1; 5) $m^5-m^3+m^2-1$; 6) x^4+x^3+x+1.

439. Докажите, что число 27^2-14^2 делится на 13 без остатка.

440. Докажите, что при любом целом n значение выражения $(7n-2)^2-(2n-7)^2$ делится без остатка на 5; на 9.

441. Решите уравнение:

1) $(x-3)(x^2+3x+9)-(3x-17)=x^3-12$;

2) $5x-(4-2x+x^2)(x+2)+x(x-1)(x+1)=0$.

442. Скорость моторной лодки по течению реки 18 км/ч, а против течения — 14 км/ч. Найдите скорость течения реки и скорость моторной лодки в стоячей воде.

Проверьте себя!

1. Представьте выражение $(a-3)^2+(a-3)(a+3)+6a$ в виде многочлена стандартного вида.

2. Разложите на множители:

1) $xy-2y$;	2) $16a^2-81$;	3) $3x^2-6x^3$;
4) $x^2-10x+25$;	5) $3(x-1)+y(x-1)$;	6) $2a^2-4ab+2b^2$.

3. Разложите на множители многочлен a^2-3ab+ $+3a-9b$ и найдите его числовое значение при $a=1,\ b=-\frac{1}{3}$.

Упражнения к главе IV

Разложите на множители **(443—447)**:

443. 1) $6(a+b)+(a+b)^2$; 3) $(a-b)+(b-a)^2$;

2) $4(x-y)+3(x-y)^2$; 4) $(a-b)^2-(b-a)$.

444. 1) $3(x+y)(x-y)+(x+y)^2$; 3) $5(a-b)^2-(a+b)(b-a)$;

2) $(x+y)^3-x(x+y)^2$; 4) $a(a-b)^2-(b-a)^2$.

445. 1) $(y+z)(12x^2+6x)+(y-z)(12x^2+6x)$;

2) $(y-z)(12x^2-6x)+(y-z)(12x^2+6x)$;

3) $(6x^2-3)+7x(6x^2-3)-4y(6x^2-3)$;

4) $2x(8x-4y)-3y(8x-4y)-(8x-4y)$.

446. 1) $18a^2-27ab+14ac-21bc$;

2) $10x^2+10xy+5x+5y$;

3) $35ax+24xy-20ay-42x^2$;

4) $48xz^2+32xy^2-15yz^2-10y^3$.

447. 1) $16ab^2-5b^2c-10c^3+32ac^2$;

2) $6mnk^2+15m^2k-14n^3k-35mn^2$;

3) $-28ac+35c^2-10cx+8ax$;

4) $-24bx-15c^2+40bc+9cx$.

448. Упростите выражение:

1) $(2x-1)^2-2(2x-3)^2+17$;

2) $(3x+2)^2-2(x-1)^2-7x^2$;

3) $24y^2-(7y-2)^2+(5y-3)(5y+1)$;

4) $(3y+1)(2y-3)+(2y-3)^2-10y^2$.

449. Докажите, что модуль разности квадратов двух последовательных натуральных чисел — нечетное число.

450. Упростите выражение:

1) $\dfrac{53^2-27^2}{79^2-51^2}$; 3) $\dfrac{49^2-2\cdot49\cdot29+29^2}{49^2-19^2}$;

2) $\dfrac{38^2-17^2}{47^2-19^2}$; 4) $\dfrac{47^2-3^2}{27^2+2\cdot27\cdot13+13^2}$.

451. Докажите, что при любых значениях x и y верно равенство: $(x+y)(x^2-y^2)=(x-y)(x+y)^2$.

№ 8 *1) В семье шесть дочерей. Каждая из них имеет брата. Сколько в семье детей?*
2) У Мухаммаджана братьев столько же, сколько и сестер. У старшей сестры число братьев в 2 раза больше числа сестер. Сколько в семье мальчиков и сколько девочек?

Тестовые задания к главе IV

1. Вынесите общий множитель за скобки: $24a^3b^2-30a^2b^3$.

A) $6a^2b^2(4a-5b)$; B) $6ab(4a^2b-5ab^2)$;
C) $6a^2(4ab^2-5b^3)$; D) $6b^2(4a^3-5a^2)$.

2. Разложите на множители: $5(a-b)+a^2(a-b)-3(b-a)$.

A) $(a-b)(a^2+2)$; B) $(a-b)(a^2-8)$;
C) $(a-b)(8-a^2)$; D) $(a-b)(a^2+8)$.

3. Разложите на множители: $4a(x-y)+4az+7b(y-x-z)$.

A) $(x-y+z)(4a-7b)$; B) $(y-x-z)(7b+4a)$;
C) $(x-y-z)(4a-7b)$; D) $-(x-y+z)(4a+7b)$.

4. Вычислите: $16,9^2-16,9\cdot 3,7-16,9\cdot 3,2$.

A) 169; B) 1,69; C) 16,9; D) –1,69.

5. Разложите на множители: $ax+bx-3ay-3by$.

A) $(a+b)(x+3y)$; B) $(a-b)(x+3y)$;
C) $(a-b)(x-3y)$; D) $(a+b)(x-3y)$.

6. Разложите на множители: $7a(5a-3b)-10a+6b$.

A) $(5a+3b)(7a-2)$; B) $(3b-5a)(7a+2)$;
C) $(5a-3b)(7a-2)$; D) $(5a-3b)(7a+2)$.

7. Решите уравнение: $(3x+2)^2-(3x-4)^2=132$.

A) 4; B) 3; C) –5; D –4.

8. Разложите на множители: $8a^3-27b^3$.

A) $(2a-3b)^2(2a+3b)$; B) $(2a+3b)^2\cdot(2a-3b)$;
C) $(2a)^3-(3b)^3$; D) $(2a-3b)(4a^2+6ab+9b^2)$.

9. Вычислите: $(53^3+47^3):(53^2-53\cdot 47+47^2)$.

A) 6; B) 100; C) 600; D) 53^2+47^2.

Исторические сведения

В трудах древних китайских, греческих, индийских, среднеазиатских математиков при доказательстве различных алгебраических формул и решении уравнений широко использовались методы так называемой геометрической алгебры.

Они доказывают геометрическим способом соотношения вида $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, $a^2 - b^2 = (a-b) \times$ $\times (a+b)$, или $(a^2 - b^2) = (a-b)^2 + 2b(a-b)$. Например, при доказательстве формулы $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ используется геометрическая конструкция: если от квадрата со стороной a отрезать квадрат со стороной b, то площадь оставшейся фигуры равна $a(a-b) + b(a-b) = (a-b)(a+b)$, с другой стороны, та же площадь равна $(a-b)^2 + 2b(a-b)$, что очевидно из рис. 21.

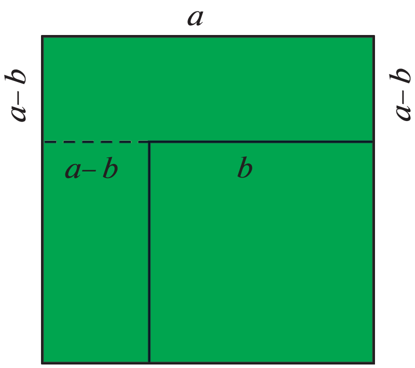


Рис. 21

Следовательно, имеет место равенство:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b).$$

При доказательстве существования прямоугольных треугольников с целыми (рациональными) сторонами китайские математики в I тыс. до н. э. исходили из равенства

$$\left(\frac{p^2 - q^2}{2}\right)^2 + (pq)^2 = \left(\frac{p^2 + q^2}{2}\right)^2.$$

ГЛАВА V

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ДРОБИ

§ 24 Алгебраическая дробь. Сокращение дробей

Задача 1. Скорость катера в стоячей воде равна a км/ч, скорость течения реки равна b км/ч. Во сколько раз скорость движения катера по течению реки больше скорости движения катера против течения?

△ Скорость движения катера по течению реки равна $(a+b)$ км/ч, скорость движения против течения равна $(a-b)$ км/ч. Поэтому скорость движения по течению в $\frac{a+b}{a-b}$ раз больше скорости движения против течения. ▲

Выражение $\frac{a+b}{a-b}$ называют *алгебраической дробью.*

Числитель этой дроби $a+b$, а ее знаменатель $a-b$.

Приведем еще несколько примеров алгебраических дробей:

$$\frac{a}{b};\quad \frac{2}{x+y};\quad \frac{a-b}{c};\quad \frac{x(b+c)}{y(a-c)}.$$

В алгебраической дроби числитель и знаменатель — алгебраические выражения.

Если вместо букв, входящих в алгебраическую дробь, подставить некоторые числа, то после вычислений получится значение этой алгебраической дроби. Например, значение алгебраической дроби $\frac{a+b}{a-b}$ при $a=10$, $b=8$ равно $\frac{10+8}{10-8}=\frac{18}{2}=9$.

В алгебраической дроби $\frac{a+b}{a-b}$ вместо a и b можно подставить любые неравные друг другу числа $(a \neq b)$, так как при $a = b$ знаменатель дроби обратится в ноль, но на ноль делить нельзя.

Условимся в дальнейшем всегда считать, что буквы, входящие в алгебраическую дробь, могут принимать лишь *допустимые значения,* т. е. такие значения, при которых знаменатель этой дроби не равен нулю.

Например, для дроби $\frac{a}{a(a-1)}$ допустимыми являются все значения a, кроме $a = 0$ и $a = 1$.

Основное свойство дроби можно записать так:

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{ma}{mb},}$$

где $b \neq 0$, $m \neq 0$.

Это свойство означает, что при умножении или делении числителя и знаменателя дроби на одно и то же алгебраическое выражение получается равная ей дробь, например:

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 5} = \frac{15}{20}; \quad \frac{a+b}{b} = \frac{(a+b) \cdot c}{bc}, \ c \neq 0.$$

Используя основное свойство дроби, можно сокращать алгебраическую дробь на общий множитель, входящий одновременно в числитель и знаменатель дроби, например:

$$\frac{a(b+c)}{a(b-c)} = \frac{b+c}{b-c}; \quad \frac{(a+b)c}{(a+b)d} = \frac{c}{d}.$$

Приведем примеры дробей, для упрощения которых нужно сначала выделить общий множитель числителя и знаменателя.

Задача 2. Сократить дробь: 1) $\frac{12a^2b}{4ab^2}$; 2) $\frac{m^2-n^2}{m^2+mn}$.

Разделим числитель и знаменатель дроби на $m+n$:

△ 1) Одночлены $12a^2b$ и $4ab^2$ имеют общий множитель $4ab$. Разделив числитель и знаменатель дроби на $4ab$, получим:

$$\frac{12a^2b}{4ab^2} = \frac{4ab \cdot 3a}{4ab \cdot b} = \frac{3a}{b}.$$

2) Многочлены $m^2 - n^2$ и $m^2 + mn$ имеют общий множитель $m + n$, так как $m^2 - n^2 = (m + n)(m - n)$, $m^2 + mn = m(m + n)$.

Разделим числитель и знаменатель дроби на $m + n$:

$$\frac{m^2 - n^2}{m^2 + mn} = \frac{(m+n)(m-n)}{m(m+n)} = \frac{m-n}{m}. \ ▲$$

! Для сокращения дроби нужно числитель и знаменатель разделить на их общий множитель.

Подчеркнем, что если поменять знак числителя или знаменателя дроби на противоположный, получится дробь, противоположная первоначальной:

$$\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}; \quad \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}.$$

Например, $\frac{-3}{7} = -\frac{3}{7}$; $\frac{-a}{1-a} = -\frac{a}{1-a} = \frac{a}{a-1}$.

Задача 3. Упростить дробь $\frac{3a(y-x)}{a^2(x-y)}$:

△ $$\frac{3a(y-x)}{a^2(x-y)} = \frac{-3a(x-y)}{a^2(x-y)} = \frac{-3}{a} = -\frac{3}{a}. \ ▲$$

Упражнения

452. Запишите алгебраическую дробь, числитель которой равен произведению чисел x и y, а знаменатель — их сумме.

453. Запишите алгебраическую дробь, числитель которой равен разности чисел p и q, а знаменатель — их произведению.

454. Запишите алгебраическую дробь, числитель которой равен разности квадратов чисел a и b, а знаменатель — квадрату разности этих чисел.

455. Запишите алгебраическую дробь, числитель которой равен сумме кубов чисел c и d, а знаменатель — удвоенному произведению этих чисел.

456. Найдите числовое значение алгебраической дроби:

1) $\frac{1}{a}$ при $a = 2\frac{3}{5}$;
2) $\frac{b+1}{b-1}$ при $b = 1{,}5$;
3) $\frac{a^2+1}{2a}$, при $a = -3$;
4) $\frac{a-b}{a+2b}$, при $a = 16, b = -3$;
5) $\frac{5a+b^2}{a^2-5b}$ при $a = 2, b = 8$;
6) $\frac{-7ab}{3b^2-a^3}$ при $a = 3, b = -4$.

457. Найдите: 1) v из формулы $S = vt$; 2) V из формулы $p = \frac{m}{V}$; 3) R из формулы $C = 2\pi R$; 4) a из формулы $P = 2(a+b)$.

458. Сколько грузовых машин (x) понадобится для перевозки n мешков картофеля по p кг картофеля в каждом, если на каждую грузовую машину можно погрузить t т картофеля? Найдите x при $n = 90$, $p = 50$, $t = 1{,}5$.

459. Производительность машины c м линолеума в час. За сколько дней можно изготовить a м линолеума, если машина работает ежедневно в течение n часов? Найдите t при $c = 47$, $a = 11280$ и $n = 16$, если t обозначает число дней работы машины.

460. Проверьте, что две дроби равны:

1) $\frac{6}{7}$ и $\frac{18}{21}$;
2) $\frac{-3}{5}$ и $\frac{27}{-45}$;
3) $\frac{2}{3}$ и $\frac{2a}{3a}$;
4) $\frac{2a}{7b}$ и $\frac{2a^2b}{7ab^2}$;
5) $\frac{m-n}{m+n}$ и $\frac{m^2-n^2}{(m+n)^2}$;
6) $\frac{a+3b}{c}$ и $\frac{(a+3b)c}{c^2}$.

Сократите дробь **(461—463):**

461. 1) $\frac{-48}{-56}$; 2) $\frac{-64}{-80}$; 3) $\frac{-121}{55}$; 4) $\frac{28}{-14}$.

462. 1) $\frac{12a}{20}$; 2) $\frac{2c}{3c}$; 3) $\frac{7b}{21b}$; 4) $\frac{4ab}{8ac}$; 5) $\frac{a^2}{2a}$; 6) $\frac{5x}{x^3y}$.

463. 1) $\frac{a^2}{a^3}$; 2) $\frac{b^3}{b^7}$; 3) $\frac{a^5}{a^4}$; 4) $\frac{b^6}{b^4}$.

Сократите дробь **(464 — 474):**

464. 1) $\frac{6ab}{4a}$; 2) $\frac{14c}{49c}$; 3) $\frac{a^4b}{ab^3}$; 4) $\frac{3a^2b}{9a^3}$; 5) $\frac{12a^4b^2}{18a^3b^3}$; 6) $\frac{25a^3bc^2}{125ac^3}$.

465. 1) $\frac{4(m+n)}{5(m+n)}$; 2) $\frac{7a(a-b)}{5(a-b)}$; 3) $\frac{2b(m-n)}{8b(m-n)(m-n)}$; 4) $\frac{3a(a+b)}{9a(a+b)(a-b)}$; 5) $\frac{2(a-b)}{b-a}$; 6) $\frac{5(x-y)}{15(y-x)}$.

466. 1) $\frac{(a-b)^2}{a-b}$; 2) $\frac{m+n}{(m+n)^4}$; 3) $\frac{m-n}{(n-m)^2}$; 4) $\frac{(2x-3y)^2}{3y-2x}$; 5) $\frac{3m(1-x)^2}{9m^2(x-1)^2}$; 6) $\frac{8a^2b(a-b)}{4a^3b(b-a)^2}$.

467. 1) $\frac{3x+3y}{6c}$; 2) $\frac{8a}{4m-4n}$; 3) $\frac{2a+2b}{4a-4b}$; 4) $\frac{12a-3}{6a+9}$; 5) $\frac{ac-bc}{ac+bc}$; 6) $\frac{a+ab}{a-ab}$.

468. 1) $\frac{a^2}{a^2+ab}$; 2) $\frac{pq^3}{p^2q-pq^2}$; 3) $\frac{7a+14b}{3a+6b}$; 4) $\frac{2m^2-mn}{2mn-n^2}$; 5) $\frac{3a-6b}{12b-6a}$; 6) $\frac{x^2-2xy}{2y^2-xy}$.

469. 1) $\frac{12x^2-30xy}{30x^2-12xy}$; 2) $\frac{36a^2+24ab}{24a^2+36ab}$;

3) $\frac{m^3-3m^2n}{3m^2n-3m^3}$; 4) $\frac{a^3-2a^2b}{2a^3b^2-a^4b}$.

470. 1) $\frac{a^2-b^2}{a+b}$; 3) $\frac{4c^2-9x^2}{2c-3x}$; 5) $\frac{3a(a-b)}{6a^2(b-a)}$;

2) $\frac{a-b}{a^2-b^2}$; 4) $\frac{25-x^2}{5-x}$; 6) $\frac{5a(c^2-4)}{10a^2(2-c)}$.

471. 1) $\frac{8-3c}{9c^2-64}$; 3) $\frac{2y-10}{25-y^2}$; 5) $\frac{b^2-c^2}{b^4n-c^4n}$;

2) $\frac{100-49b^2}{7b+10}$; 4) $\frac{5y-y^2}{25-y^2}$; 6) $\frac{5a^3b+5ab^3}{a^4-b^4}$.

472. 1) $\frac{d^2-6d+9}{d-3}$; | 2) $\frac{b+7}{b^2+14b+49}$; | 3) $\frac{9-6a+a^2}{3-a}$; | 4) $\frac{1-2p}{1-4p+4p^2}$.

473. 1) $\frac{4y^2-4y+1}{4y^2-1}$; 3) $\frac{3a^2-6ab+3b^2}{6a^2-6b^2}$;

2) $\frac{16a^2-1}{16a^2-8a+1}$; 4) $\frac{50m^2+100mn+50n^2}{15m^2-15n^2}$.

474. 1) $\frac{1-a^2}{(a-1)^2}$; 3) $\frac{4y^2-4y+1}{2-4y}$;

2) $\frac{(m-n)^2}{n-m}$; 4) $\frac{5-2x}{4x^2-20x+25}$.

475. Сократите дробь:

1) $\frac{9c^2-16}{16-24c+9c^2}$; 4) $\frac{36c-c^3}{c^3+12c^2+36c}$;

2) $\frac{16x^2-24xy+9y^2}{9y^2-16x^2}$; 5) $\frac{25b-49b^3}{49b^3-70b^2+25b}$;

3) $\frac{4x^2-4xy+y^2}{y^2-4x^2}$; 6) $\frac{4b^2-12bc+9c^2}{-2ab+3ac}$.

476. Сократите дробь:

1) $\frac{2a^5-128a^2}{(2a^2+8a+32)(a^4-4a^3)}$;

2) $\frac{2a^4+3a^3+2a+3}{(a^2-a+1)(2a+3)}$;

3) $\frac{3a^3+ab^2-6a^2b-2b^3}{9a^5-ab^4-18a^4b+2b^5}$;

4) $\frac{3ac^2+3bc^2-3ab^2-3b^3}{6ac^2+6bc^2-6ab^2-6b^3}$.

§ 25 Приведение дробей к общему знаменателю

Напомним, что при сложении обыкновенных дробей сначала приводят дроби к общему знаменателю. Общим знаменателем дробей является наименьшее общее кратное их знаменателей.

Так, для дробей $\frac{1}{4}, \frac{3}{25}, \frac{7}{10}$ общим знаменателем является число 100 — наименьшее общее кратное чисел 4, 25, 10.

Такое же преобразование приходится выполнять при сложении и вычитании алгебраических дробей, его также называют **приведением дробей к общему знаменателю.**

Задача 1. Привести алгебраические дроби $\frac{m}{3a^2b}$, $\frac{n}{6ab^2}$ и $\frac{p}{4ac}$ к общему знаменателю.

△ Общий знаменатель данных дробей должен делиться нацело на знаменатель каждой из дробей. Значит, он должен делиться на 3, 6 и 4, то есть на 12, на a^2 и a, то есть на a^2, на b и b^2, то есть на b^2, и, наконец, на c. Таким образом, в качестве общего знаменателя можно взять произведение $12a^2b^2c$.

Разделив этот общий знаменатель на знаменатель первой дроби, найдем одночлен, на который надо умножить числитель и знаменатель первой дроби. Этот одночлен называется *дополнительным множителем данной дроби*. Для первой дроби такой одночлен равен $4bc$. Таким же образом найдем дополнительные множители второй и третьей дробей: $2ac$ и $3ab^2$.

Умножив числитель и знаменатель каждой дроби на $4bc$, $2ac$ и $3ab^2$ соответственно, приведем их к общему знаменателю $12a^2b^2c$:

$$\frac{m}{3a^2b}=\frac{4mbc}{12a^2b^2c},\ \frac{n}{6ab^2}=\frac{2nac}{12a^2b^2c},\ \frac{p}{4ac}=\frac{3pab^2}{12a^2b^2c}.\ \blacktriangle$$

Задача 2. Привести к общему знаменателю дроби:

$$\frac{a}{x^2-y^2};\quad \frac{b}{2x^2-4xy+2y^2};\quad \frac{c}{3x^2+6xy+3y^2}.$$

$\triangle$ Разложим на множители знаменатели дробей:

$$x^2-y^2=(x-y)(x+y);$$

$$2x^2-4xy+2y^2=2(x^2-2xy+y^2)=2(x-y)^2;$$

$$3x^2+6xy+3y^2=3(x^2+2xy+y^2)=3(x+y)^2.$$

Общий знаменатель должен делиться на знаменатель каждой из данных дробей.

Так как он должен делиться на знаменатель первой дроби, то он должен содержать произведение $(x-y)(x+y)$. Далее, общий знаменатель должен делиться на знаменатель второй дроби, и поэтому он должен содержать множитель $2(x-y)^2$. Следовательно, к знаменателю первой дроби нужно дописать множитель $2(x-y)$, т. е. общий знаменатель должен содержать произведение

$$2(x-y)^2(x+y).$$

Для того, чтобы общий знаменатель делился на знаменатель третьей дроби $3(x+y)^2$, нужно к полученному произведению дописать множитель $3(x+y)$. Следовательно, общий знаменатель трех дробей равен

$$6(x-y)^2(x+y)^2.$$

Для приведения дробей к общему знаменателю нужно их числители и знаменатели умножить на дополнительные множители, которые находятся делением общего знаменателя на знаменатель каждой из дробей; для данных дробей они соответственно равны

$$6(x-y)(x+y);\ 3(x+y)^2;\ 2(x-y)^2.$$

Следовательно, данные дроби можно записать так:

$$\frac{a}{x^2-y^2}=\frac{6a(x-y)(x+y)}{6(x-y)^2(x+y)^2};\quad \frac{b}{2x^2-4xy+2y^2}=\frac{3b(x+y)^2}{6(x-y)^2(x+y)^2};$$

$$\frac{c}{3x^2+6xy+3y^2}=\frac{2c(x-y)^2}{6(x-y)^2(x+y)^2}.$$

Таким образом, для приведения алгебраических дробей к общему знаменателю нужно:

1) найти общий знаменатель данных дробей;

2) для каждой дроби найти дополнительный множитель;

3) умножить числитель каждой дроби на ее дополнительный множитель;

4) записать каждую дробь с найденным числителем и общим знаменателем.

Упражнения

Приведите дроби к общему знаменателю **(477—484):**

477. 1) $\frac{1}{2}$ и $\frac{2}{3}$; 3) $\frac{5}{7}$ и $\frac{3}{14}$; 5) $\frac{x}{2y}$ и $\frac{x}{3y}$;

2) $\frac{1}{a}$ и $\frac{2}{b}$; 4) $\frac{a}{b}$ и $\frac{a}{2b}$; 6) $\frac{8}{15}$ и $\frac{5}{12}$.

478. 1) $\frac{3}{4a}$, $\frac{1}{5b}$ и $\frac{7}{20ab}$; 3) $\frac{7}{a^2}$ и $\frac{8}{a^3}$;

2) $\frac{3x}{4y}$, $\frac{6}{xy}$ и $\frac{4y}{3x}$; 4) $\frac{a}{2x}$ и $\frac{b}{4x^3}$.

479. 1) a и $\frac{b^2}{a}$; 3) a^2 и $\frac{c}{2ab}$;

2) $3b$ и $\frac{a^2}{2b}$; 4) $\frac{b}{3a}$, $\frac{3c}{2b}$ и ab.

480. 1) $\frac{1}{2p^2}$, $\frac{1}{6pk}$ и $\frac{1}{3k^2}$;

3) $\frac{2a}{b^2}$, $\frac{4}{15a^2b}$ и $\frac{3}{20a^3b^4}$;

2) $\frac{1}{6b^2}$, $\frac{a^2+b^2}{9a^2b^2}$ и $\frac{3-a^2}{18ab^2}$;

4) $\frac{7}{20x^4y}$, $\frac{31}{6xy^3}$ и $\frac{4}{3x^2y^4}$.

481. 1) $\frac{3}{x+y}$ и $\frac{5}{x}$;

3) $\frac{7x}{2(x-1)}$ и $\frac{5x}{x-1}$;

2) $\frac{6}{a-1}$ и $\frac{2}{a}$;

4) $\frac{2a^2}{3(a+1)}$ и $\frac{5a^2}{4(a+1)}$.

482. 1) $\frac{1}{x-y}$ и $\frac{1}{x+y}$;

3) $\frac{5x}{2x-2}$ и $\frac{3}{4x-4}$;

2) $\frac{7a}{3x-y}$ и $\frac{6b}{3x+y}$;

4) $\frac{3x}{4x+4y}$ и $\frac{x}{8x+8y}$.

483. 1) $\frac{3b}{b-2}$ и $\frac{4}{b^2-4}$;

3) $\frac{1}{1-a}$, $\frac{2a}{1+a}$ и $\frac{a^2}{1-a^2}$;

2) $\frac{7a}{x^2-9}$ и $\frac{a}{x+3}$;

4) $\frac{6x}{x-y}$, $\frac{7xy}{x+y}$ и $\frac{3}{x^2-y^2}$.

484. 1) $\frac{m}{2m+2n}$, $\frac{n}{8m-8n}$ и $\frac{mn}{6m^2-6n^2}$;

2) $\frac{2c}{5b-5c}$, $\frac{3a^2}{35b^2-35c^2}$ и $\frac{7b}{14b+14c}$;

3) $\frac{1}{a^2-4b^2}$, $\frac{1}{3a^2+6ab}$ и $\frac{1}{2ab-a^2}$;

4) $\frac{5}{4x-4}$, $\frac{4x}{1-x^2}$ и $\frac{1}{3x^2+3x}$.

№ 9 *Гусеница днем взбиралась на дерево на 2 м вверх, а ночью спускалась на 1 м вниз по стволу. На 9-й вечер она оказалась на верхушке дерева. Сколько метров составляет высота дерева?*

§ 26 Сложение и вычитание алгебраических дробей

Сложение и вычитание алгебраических дробей с одинаковыми знаменателями выполняются по тем же правилам, что и сложение и вычитание обыкновенных дробей:

$$\boxed{\frac{a}{m}+\frac{b}{m}=\frac{a+b}{m};} \qquad \boxed{\frac{a}{m}-\frac{b}{m}=\frac{a-b}{m}.}$$

Задача 1. Сложить дроби $\frac{a-b}{a+b}$, $\frac{2a-b}{a+b}$ и $\frac{a-2b}{a+b}$.

△ $$\frac{a-b}{a+b}+\frac{2a-b}{a+b}+\frac{a-2b}{a+b}=\frac{a-b+2a-b+a-2b}{a+b}=\frac{4a-4b}{a+b}=\frac{4(a-b)}{a+b}.$$ ▲

Задача 2. Найти разность дробей $\frac{a^2}{a+b}$ и $\frac{b^2}{a+b}$.

△ $$\frac{a^2}{a+b}-\frac{b^2}{a+b}=\frac{a^2-b^2}{a+b}=\frac{(a+b)(a-b)}{a+b}=a-b.$$ ▲

Для сложения и вычитания алгебраических дробей с разными знаменателями нужно привести эти дроби к общему знаменателю и воспользоваться правилом сложения или вычитания дробей с одинаковыми знаменателями.

Задача 3. Сложить дроби $\frac{1}{a^3}$, $\frac{1}{2a^2b}$ и $\frac{1}{3ab^2}$.

△ Общим знаменателем данных дробей является произведение $6a^3b^2$. Следовательно,

$$\frac{1}{a^3}+\frac{1}{2a^2b}+\frac{1}{3ab^2}=\frac{6b^2}{6a^3b^2}+\frac{3ab}{6a^3b^2}+\frac{2a^2}{6a^3b^2}=\frac{2a^2+3ab+6b^2}{6a^3b^2}.$$ ▲

Задача 4. Найти разность дробей $\frac{a}{3b^2c}$ и $\frac{c}{15ab^2}$.

△ $$\frac{a}{3b^2c}-\frac{c}{15ab^2}=\frac{5a^2}{15ab^2c}-\frac{c^2}{15ab^2c}=\frac{5a^2-c^2}{15ab^2c}.$$ ▲

Задача 5. Сложить дроби $\frac{1}{x^2-x}$ и $\frac{3}{x^2-1}$.

△ Разложим многочлены, стоящие в знаменателях дробей, на множители: $x^2-x=x(x-1)$, $x^2-1=(x-1)(x+1)$.

Общим знаменателем данных дробей является произведение $x(x-1)(x+1)$. Приведя дроби к общему знаменателю, найдем:

$$\frac{1}{x^2-x}+\frac{3}{x^2-1}=\frac{1}{x(x-1)}+\frac{3}{(x-1)(x+1)}=\frac{x+1}{x(x^2-1)}+\frac{3x}{x(x^2-1)}=$$

$$=\frac{x+1+3x}{x(x^2-1)}=\frac{4x+1}{x(x^2-1)}.$$ ▲

Таким образом, для сложения или вычитания алгебраических дробей с разными знаменателями нужно:
1) **найти общий знаменатель дробей;**
2) **привести дроби к общему знаменателю;**
3) **сложить или вычесть полученные дроби;**
4) **упростить результат, если возможно.**

Задача 6. Вычислить значение выражения

$$\frac{1}{a^2+4a+4}-\frac{4}{a^4+4a^3+4a^2}+\frac{4}{a^3+2a^2} \text{ при } a=0,5.$$

△ Данное выражение можно преобразовать так:

$$\frac{1}{(a+2)^2}-\frac{4}{a^2(a^2+4a+4)}+\frac{4}{a^2(a+2)}=\frac{1}{(a+2)^2}-\frac{4}{a^2(a+2)^2}+\frac{4}{a^2(a+2)}=$$

$$=\frac{a^2-4+4(a+2)}{a^2(a+2)^2}=\frac{a^2+4a+4}{a^2(a+2)^2}=\frac{1}{a^2}.$$

Следовательно, искомое значение равно

$$\frac{1}{0,5^2}=\frac{1}{0,25}=\frac{100}{25}=4.$$ ▲

Найдите сумму (разность) дробей **(485—491):**

485. 1) $\frac{p}{q^2}+\frac{3p}{q^2}$; 3) $\frac{a}{a+b}+\frac{c}{a+b}$;

2) $\frac{8a}{b^3}-\frac{3a}{b^3}$; 4) $\frac{x}{n+a}-\frac{y}{n+a}$.

486. 1) $\frac{c+d}{2a}+\frac{2c-d}{2a}$; 2) $\frac{a+2b}{3c^2}+\frac{5a-2b}{3c^2}$; 3) $\frac{a+b}{2c}-\frac{a-b}{2c}$;

4) $\frac{10a-b}{a^3}-\frac{3a-b}{a^3}$; 5) $\frac{(1+b)^2}{5d}+\frac{(1-b)^2}{5d}$; 6) $\frac{(2+a)^2}{a^2b}-\frac{(2-a)^2}{a^2b}$.

487. 1) $\frac{2}{5}+\frac{3}{7}$; 3) $\frac{2}{3a}+\frac{1}{a}$; 5) $\frac{c}{15a}+\frac{d}{3}$;

2) $\frac{4}{7}-\frac{5}{28}$; 4) $\frac{1}{b}-\frac{2}{5b}$; 6) $\frac{a}{4}-\frac{b}{12d}$.

488. 1) $\frac{m}{2}-\frac{1}{n}$; 2) $\frac{3}{a}+\frac{b}{5}$; 3) $5-\frac{1}{a}$; 4) $\frac{2}{b}+7$.

489. 1) $5-\frac{2}{b}+\frac{3}{b^2}$; 2) $\frac{2}{c}+4-\frac{3}{c^2}$; 3) $d-\frac{c}{d}+\frac{c^2}{d^2}$; 4) $\frac{m}{n}-k+\frac{m^2}{n^2}$.

490. 1) $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}$; 3) $\frac{a}{bc}-\frac{a}{bd}$; 5) $\frac{3}{m^2}+\frac{4}{mn}$;

2) $\frac{1}{mn}-\frac{1}{mk}$; 4) $\frac{b}{ac}+\frac{b}{cd}$; 6) $\frac{2}{mn}-\frac{3}{n^3}$.

491. 1) $\frac{3c}{4a^3b}+\frac{5d}{6ab^3}$; 3) $\frac{2}{3y^3}-\frac{1}{6x^2y}+\frac{5}{12xy^2}$; 5) $\frac{a}{b^2}+\frac{b}{c^2}+\frac{c}{a^2}$;

2) $\frac{2a}{9b^4}-\frac{7c}{6a^3b}$; 4) $\frac{5}{7x^2y}-\frac{3}{4xy^2}+\frac{11}{14x^2y^2}$; 6) $\frac{b}{c}+\frac{b}{c^2d}+\frac{b}{cd^2}$.

Сложите и вычтите алгебраические дроби **(492—503):**

492. 1) $\frac{2x}{3(a-b)}+\frac{x}{a-b}$; 3) $\frac{2a^2}{3(a+1)}+\frac{5a^2}{4(a+1)}$;

2) $\frac{7x}{2(x-1)}-\frac{5x}{x-1}$; 4) $\frac{4y}{5(y-3)}-\frac{5x}{2(y-3)}$.

493. 1) $\frac{5}{2x-2}+\frac{3}{4x-4}$; 3) $\frac{a}{3a+3b}-\frac{2a}{6a+6b}$;

2) $\frac{7}{5b+5}-\frac{3}{10b+10}$; 4) $\frac{3x}{4x+4y}-\frac{x}{8x+8y}$.

494. 1) $\frac{3}{a^2+a}+\frac{5a}{ab+b}$; 3) $\frac{y+a}{b^2+ba}+\frac{y-b}{ab+a^2}$;

2) $\frac{5b}{ax+ay}-\frac{2a}{bx+by}$; 4) $\frac{y-b}{a^2-ab}-\frac{y-a}{ab-b^2}$.

495. 1) $\frac{3}{x+y}-\frac{5}{x}$; 3) $\frac{1}{x(x-3)}+\frac{1}{x(x+3)}$;

2) $\frac{6}{a}-\frac{10}{a-1}$; 4) $\frac{4}{5(a-b)}-\frac{7}{8(a+b)}$.

496. 1) $\frac{a}{1-b^2}+\frac{1}{1+b}$; 3) $\frac{5+p^2}{p^2-36}-\frac{p}{6+p}$;

2) $\frac{2}{x^2-9}+\frac{1}{x+3}$; 4) $\frac{2x}{x-4}-\frac{5x-2}{x^2-16}$.

497. 1) $\frac{2x}{x-4}-\frac{5x-2}{16-x^2}$; 3) $\frac{c^2-8}{2c+3}-\frac{16c-2?^3}{9-4c^2}$;

2) $\frac{12n-5}{n^2-49}+\frac{6}{7-n}$; 4) $\frac{21y^2+1}{1-9y^2}-\frac{y}{3y-1}$.

498. 1) $\frac{3}{a+2}+\frac{2a}{(a+2)^2}$; 2) $\frac{a}{(3a+1)^2}+\frac{4}{3a+1}$.

499. 1) $\frac{2y+8}{y^2-4y+4}-\frac{7}{y-2}$; 4) $\frac{4}{(m-n)^2}-\frac{7}{n-m}$;

2) $\dfrac{4-5x}{1+6x+9x^2}-\dfrac{2}{3x+1}$;

3) $\dfrac{7}{(a-b)^2}-\dfrac{5}{b-a}$;

5) $\dfrac{2a}{25-10a+a^2}+\dfrac{10}{a^2-25}$;

6) $\dfrac{1}{x^2-6x+9}+\dfrac{1}{(x+3)^2}$.

500. 1) $a+\dfrac{a}{a-1}$; 2) $b-\dfrac{b}{b-2}$; 3) $c+1-\dfrac{c^2}{c-1}$; 4) $\dfrac{a^2}{a+1}-a+1$.

501. 1) $\dfrac{7}{a+b}+\dfrac{8}{a-b}-\dfrac{16b}{a^2-b^2}$;

2) $\dfrac{6x}{x^2-y^2}-\dfrac{3}{x-y}-\dfrac{4}{x+y}$;

3) $\dfrac{3}{a+3}+\dfrac{2}{3-a}-\dfrac{6}{a^2-9}$;

4) $\dfrac{3}{4a^2-9}-\dfrac{8}{2a+3}-\dfrac{7}{3-2a}$.

502. 1) $\dfrac{a+b}{a}-\dfrac{a}{a-b}-\dfrac{b}{a^2-ab}$;

2) $\dfrac{5b-1}{3b^2-3}+\dfrac{b+2}{2b+2}-\dfrac{b+1}{b-1}$;

3) $\dfrac{6a}{9a^2-1}+\dfrac{3a+1}{3-9a}+\dfrac{3a-1}{6a+2}$;

4) $\dfrac{7}{m}-\dfrac{4}{m-2n}-\dfrac{m-n}{4n^2-m^2}$;

5) $x-\dfrac{xy}{x+y}-\dfrac{x^3}{x^2-y^2}$;

6) $a-2+\dfrac{4a}{2+a}-\dfrac{a^3+b}{a^2+2a}$.

503. 1) $\dfrac{a+1}{a^3-1}-\dfrac{1}{a^2+a+1}$;

2) $\dfrac{a^2+4}{a^3+8}-\dfrac{1}{a+2}$;

3) $\dfrac{a+b}{a^2-ab+b^2}-\dfrac{1}{a+b}$;

4) $\dfrac{m^2-3m+9}{m^3-27}-\dfrac{1}{m-3}$.

504. Упростите выражение, затем найдите его числовое значение:

1) $\dfrac{8a^2}{a^3-1}+\dfrac{a+1}{a^2+a+1}$ при $a=2$;

2) $\dfrac{3c^2-c+3}{c^3-1}-\dfrac{c-1}{c^2+c+1}+\dfrac{2}{1-c}$ при $c=1\dfrac{1}{2}$.

§ 27 Умножение и деление алгебраических дробей

Умножение и деление алгебраических дробей выполняются по тем же правилам, что и умножение и деление обыкновенных дробей:

$$\boxed{\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd};} \qquad \boxed{\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}.}$$

Задача 1. Найти произведение дробей

$$\frac{1}{2xy},\ \frac{4x^2y^3}{5z} \text{ и } \frac{10z^2}{3x^3}.$$

$$\triangle\ \frac{1}{2xy}\cdot\frac{4x^2y^3}{5z}\cdot\frac{10z^2}{3x^3}=\frac{1\cdot 4x^2y^3\cdot 10z^2}{2xy\cdot 5z\cdot 3x^3}=\frac{4y^2z}{3x^2}.\ \blacktriangle$$

Задача 2. Умножить дроби $\dfrac{a-b}{a^2+ab}$ и $\dfrac{b^2+ab}{(a-b)^2}$.

$$\triangle\ \frac{a-b}{a^2+ab}\cdot\frac{b^2+ab}{(a-b)^2}=\frac{(a-b)\,b\,(a+b)}{a\,(a+b)\,(a-b)^2}=\frac{b}{a\,(a-b)}.\ \blacktriangle$$

Задача 3. Выполнить деление дробей $\dfrac{m+n}{9m^2n^3}$ и $\dfrac{m^2-n^2}{27mn^2}$.

$$\triangle\ \frac{m+n}{9m^2n^3}:\frac{m^2-n^2}{27mn^2}=\frac{(m+n)\cdot 27mn^2}{9m^2n^3\left(m^2-n^2\right)}=\frac{(m+n)\,3}{mn\,(m-n)\,(m+n)}=\frac{3}{mn\,(m-n)}.\ \blacktriangle$$

При возведении алгебраической дроби в степень используется формула

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}.$$

Например,

$$\left(\frac{4a^2}{b}\right)^2=\frac{16a^4}{b^2};\ \left(\frac{a+b}{3c}\right)^3=\frac{(a+b)^3}{27c^3}.$$

Перемножьте дроби **(505—506):**

505. 1) $\frac{85}{24}\cdot\frac{72}{17}$; 2) $\frac{256}{169}\cdot\frac{13}{64}$; 3) $50\cdot\frac{7}{625}$; 4) $\frac{5}{26}\cdot 39$.

506. 1) $\frac{a^3b}{c}\cdot\frac{c^2}{a^4}$; 3) $\frac{6a}{5b}\cdot\frac{15c}{2d}$; 5) $\frac{2a}{3b}\cdot 3c$;

2) $\frac{m^2n^2}{k}\cdot\frac{k^3}{m^3n^3}$; 4) $\frac{4m}{9n}\cdot\frac{27k}{16d}$; 6) $14a^2\cdot\frac{b^2}{7c^3}$.

507. Выполните деление дробей:

1) $\frac{3}{5}:\frac{3}{7}$; 3) $\frac{a}{8}:\frac{1}{3}$; 5) $\frac{2}{a}:\frac{6}{7}$;

2) $\frac{11}{12}:\frac{2}{5}$; 4) $\frac{6}{c}:\frac{m}{13}$; 6) $\frac{9}{35}:\frac{b}{5}$.

508. Выполните деление дробей:

1) $\frac{8}{17}:\frac{8}{17}$; 3) $\frac{3a}{7b}:\frac{a}{b}$; 5) $\frac{2a}{3b}:\frac{a^2}{bc}$;

2) $\frac{a}{b}:\frac{a}{b}$; 4) $\frac{c}{2d}:\frac{4c^2}{5d}$; 6) $\frac{5m}{n^2}:\frac{10m^3}{n}$.

509. Выполните деление дробей:

1) $\frac{17}{12}:\frac{34}{39}$; 3) $\frac{4}{13}:5$; 5) $12:\frac{8}{9}$;

2) $\frac{54}{25}:\frac{81}{75}$; 4) $\frac{a}{b}:c$; 6) $a:\frac{b}{c}$.

510. Выполните деление дробей:

1) $\frac{a^2b}{c}:\frac{a^4}{c^2}$; 3) $\frac{4a}{5b}:\frac{12c}{25d}$; 5) $\frac{6a}{5b}:(5c)$;

2) $\frac{mn}{k}:\frac{m^2n^2}{k^3}$; 4) $\frac{8m}{9n}:\frac{16k}{27d}$; 6) $12a^2:\frac{4d}{5c^2}$.

Выполните действия **(511—517):**

511. 1) $\left(\frac{5a}{7b}\right)^2\cdot\frac{14b^2}{25a^3}$; 2) $\left(\frac{3a^2}{2b}\right)^3\cdot\frac{16b^3}{21a^4}$; 3) $\frac{2a^2}{5b^2}:\frac{12a^2}{15b^2}$;

4) $\dfrac{3a^3}{7b} : \dfrac{9a^4}{21b}$; 5) $\left(\dfrac{ab}{cd}\right)^2 \cdot acd$; 6) $abc^2 \cdot \left(\dfrac{ab}{cd}\right)^2$.

512. 1) $\dfrac{8a^2b}{9c} \cdot \dfrac{36c^3}{5a^3b}$; 3) $\dfrac{16x^2y}{7z} : \dfrac{20xy^3}{21z^2}$; 5) $\dfrac{18m^3n^5}{7k} : (9n^2)$;

2) $\dfrac{7b^4}{9c^5y} : \dfrac{35b^4c^2}{18c^4y^2}$; 4) $\dfrac{46d^3c}{15a} : \dfrac{23dc^2}{5a^3}$; 6) $24k^2 : \dfrac{12m^4k^2}{11p^3n}$.

513. 1) $\dfrac{3x^2y}{4a^2b} \cdot 4a^2b$; 3) $15xy : \dfrac{30xy}{7a^2b}$;

2) $\dfrac{5a^2b}{7xy^2} \cdot 14xy^2$; 4) $\dfrac{7x^2y}{2a^2b} : (14x^2y)$.

514. 1) $\dfrac{7-x}{a+b} \cdot \dfrac{a-b}{7-x}$; 3) $\dfrac{c+d}{c-d} : \dfrac{c}{c-d}$; 5) $\dfrac{a^2-ab}{b} \cdot \dfrac{b}{a}$;

2) $\dfrac{x-y}{2a} \cdot \dfrac{4b}{x-y}$; 4) $\dfrac{a-b}{2b} : \dfrac{a-b}{6b^2}$; 6) $\dfrac{ab+b^2}{9} : \dfrac{b^2}{3a}$.

515. 1) $\dfrac{a+1}{b} \cdot \dfrac{4b^2}{a^2-1}$; 4) $\dfrac{5m}{m^2-n^2} : \dfrac{15m^3}{m-n}$;

2) $\dfrac{1-a}{3b^2} \cdot \dfrac{b^3}{1-a^2}$; 5) $\dfrac{3(x+y)}{4y^2(x^2+y^2)} \cdot \dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$;

3) $\dfrac{a^2-b^2}{9b^2} : \dfrac{a+b}{3b}$; 6) $\dfrac{5(a-b)}{3(a^2+b^2)} : \dfrac{(a-b)^2}{a^2+b^2}$.

516. 1) $\dfrac{a^2-b^2}{3a+3b} \cdot \dfrac{3a^2}{5b-5a}$; 4) $\dfrac{3n^2-3m^2}{n^2+np} \cdot \dfrac{6m-6n}{n+p}$;

2) $\dfrac{5x^2-5y^2}{x^2+y^2} \cdot \dfrac{3x^2}{10y-10x}$; 5) $\dfrac{a^2+b^2}{x^3+x^2y} \cdot \dfrac{x^2-y^2}{a^4-b^4}$;

3) $\dfrac{a^2-25}{a^2-3a} : \dfrac{a+5}{9-a^2}$; 6) $\dfrac{a^2+b^2}{a^2-ab} : \dfrac{a^4b-b^5}{a^2b-ab^2}$.

517. 1) $\frac{a-5}{a^2+6a+9}\cdot\frac{(a+3)^2}{a^2-25}$; 3) $\frac{a^2-49}{a^2+2ab+b^2}\cdot\frac{a+b}{a-7}$;

2) $\frac{b^2-8b+16}{b+3}:\frac{(b-4)^2}{b^2-9}$; 4) $\frac{a^2-2a+1}{2a+1}:\frac{a-1}{4a^2-1}$.

§ 28 *Совместные действия над алгебраическими дробями*

Рассмотрим примеры совместного выполнения действий над алгебраическими дробями.

Задача 1. Упростить выражение $\left(\frac{a+1}{2a-2}-\frac{1}{2a^2-2}\right)\cdot\frac{2a+2}{a+2}$.

△ Выполним вычитание в скобках:

$$\frac{a+1}{2a-2}-\frac{1}{2a^2-2}=\frac{a+1}{2(a-1)}-\frac{1}{2(a^2-1)}=\frac{(a+1)^2-1}{2(a^2-1)}=$$

$$=\frac{(a+1-1)(a+1+1)}{2(a^2-1)}=\frac{a(a+2)}{2(a+1)(a-1)}.$$

Найдем произведение:

$$\frac{a(a+2)}{2(a+1)(a-1)}\cdot\frac{2a+2}{a+2}=\frac{a(a+2)\,2(a+1)}{2(a+1)(a-1)(a+2)}=\frac{a}{a-1}.\ \blacktriangle$$

Задача 2. Выполнить действия:

$$\left(\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}\right):\left(\frac{a+b}{a-b}-1\right).$$

△ Выполним действие в первой скобке:

$$\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}=\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{(a-b)(a+b)}=\frac{(a+b+a-b)(a+b-a+b)}{a^2-b^2}=$$

$$=\frac{2a\cdot 2b}{a^2-b^2}=\frac{4ab}{a^2-b^2}.$$

Выполним действие во второй скобке:

$$\frac{a+b}{a-b}-1=\frac{a+b-a+b}{a-b}=\frac{2b}{a-b}.$$

Выполним деление:

$$\frac{4ab}{a^2-b^2}:\frac{2b}{a-b}=\frac{4ab(a-b)}{(a^2-b^2)2b}=\frac{2a}{a+b}. \blacktriangle$$

Задача 3. Первая труба наполняет бассейн за a часов, а вторая — за b часов. За сколько времени наполнят бассейн обе трубы, открытые одновременно?

$\triangle$ Пусть объем бассейна равен V. За один час первая труба наполнит часть бассейна, равную $\frac{V}{a}$, вторая — часть бассейна, равную $\frac{V}{b}$, а обе трубы за один час наполнят часть бассейна, равную $\frac{V}{a}+\frac{V}{b}$. Пусть t — искомое время. За t часов обе трубы должны наполнить бассейн, то есть

$$\left(\frac{V}{a}+\frac{V}{b}\right)\cdot t=V.$$

Разделив обе части уравнения на V, получим

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)t=1.$$

Сумма дробей, стоящих в скобках, равна $\frac{a+b}{ab}$. Поэтому $\frac{a+b}{ab}\cdot t=1$, откуда $t=\frac{ab}{a+b}$. $\blacktriangle$

Упражнения

Выполните указанные действия **(518—523):**

518. 1) $\left(\frac{a}{2}-\frac{a}{3}\right)\cdot\frac{1}{a^2}$; 3) $\frac{a-b}{a+b}\left(\frac{a}{5}+\frac{b}{5}\right)$; 5) $1:\left(1+\frac{1}{a}\right)$;

2) $\frac{a^2}{3}\cdot\left(\frac{2}{a}+\frac{2}{a^2}\right)$; 4) $\frac{ab}{a-b}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)$; 6) $b:\left(b+\frac{1}{b}\right)$.

519. 1) $\left(1+\frac{1}{a}\right):\left(1-\frac{1}{a}\right)$;

3) $\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}-2\right):\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)$;

2) $\left(a+\frac{a}{b}\right)\left(a-\frac{a}{b}\right)$;

4) $\left(\frac{m}{n}+\frac{n}{m}+2\right)\left(1+\frac{m-n}{m+n}\right)$.

520. 1) $\left(1-\frac{a-b}{a+b}\right)\left(2+\frac{2b}{a-b}\right)$;

3) $\left(\frac{6}{a-b}-\frac{5}{a+b}\right)\cdot\frac{a-b}{a+11b}$;

2) $\left(1+\frac{a+b}{a-b}\right)\left(2-\frac{2a}{a+b}\right)$;

4) $\left(\frac{3}{c}+\frac{3}{c+d}\right)\cdot\frac{c}{18(2c+d)}$.

521. 1) $\left(\frac{2m+1}{2m-1}-\frac{2m-1}{2m+1}\right):\frac{4m}{10m-5}$;

3) $\frac{y-1}{y}:\left(\frac{y^2+1}{y^2+2y}-\frac{2}{y+2}\right)$;

2) $\left(\frac{z+6}{3z+9}-\frac{1}{z+3}\right):\frac{z+2}{27z}$;

4) $\frac{m-2}{m-5}:\left(\frac{m^2+24}{m^2-25}-\frac{4}{m-5}\right)$.

522. 1) $\frac{a^2+ab}{a^2+b^2}\cdot\left(\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}\right)$;

3) $\left(\frac{c+d}{c}-\frac{2c}{c-d}\right)\cdot\frac{d-c}{c^2+d^2}$;

2) $\frac{ab-b^2}{a^2+b^2}\cdot\left(\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a-b}\right)$;

4) $\left(\frac{2c}{c+d}+\frac{d-c}{c}\right)\cdot\frac{c+d}{c^2+d^2}$.

523. 1) $\left(\frac{a+1}{2a-2}+\frac{6}{2a^2-2}-\frac{a+3}{2a+2}\right)\cdot\frac{4a^2-4}{3}$;

2) $\left(\frac{b}{a^2+ab}+\frac{2}{a+b}+\frac{a}{b^2+ab}\right):\frac{a^2-b^2}{4ab}$;

3) $\frac{a^2-c^2}{a+b}\cdot\frac{a^2-b^2}{ac+c^2}\cdot\left(a+\frac{ac}{a-c}\right)$;

4) $\frac{c^2-ac}{a^2-b^2}\cdot\frac{a-b}{c^2-a^2}:\left(c-\frac{ac}{a+c}\right)$.

524. Масса куска льда объемом V м³ равна p кг. Чему равна масса куска объемом V_1 м³?

525. Автомобиль, двигаясь со скоростью v км/ч, прошел s км. Какой путь пройдет за то же время мотоцикл, если его скорость равна u км/ч?

526. Собственная скорость моторной лодки v км/ч, а скорость течения реки v_1 км/ч. Двигаясь по течению, лодка прошла s км. Какое расстояние пройдет за это же время моторная лодка при движении против течения?

527. (*Задача Абу Райхана Беруни*). Десять изделий одного вида стоят один динар, пятнадцать изделий другого вида также стоят один динар. Сколько изделий каждого вида можно купить на один динар, если покупать одинаковое количество тех и других изделий?

Проверьте себя!

1. Найти допустимые значения букв, входящих в дробь: $\frac{a}{b}$; $\frac{3}{a-1}$; $\frac{a}{b+2}$.

2. Выполните указанные действия:

1) $4a+\frac{1-4a^2}{a}$;

2) $\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}$;

3) $\frac{2a-4}{3b}\cdot\frac{6b}{a-2}$;

4) $\frac{a^2-b^2}{b^2}:\frac{a+b}{b}$.

3. Упростите выражение

$$\frac{1+2x}{x-3}-\frac{x^2+3x}{5}\cdot\frac{10}{x^2-9}$$

и найдите его числовое значение при $x=2\frac{2}{3}$.

Упражнения к главе V

Приведите дроби к общему знаменателю:

528. 1) $\frac{5a}{a^3-27}$, $\frac{a-3}{a^2+3a+9}$ va $\frac{1}{a-3}$; 2) $\frac{3}{x+2}$, $\frac{x+1}{x^3+8}$ va $\frac{x+2}{x^2-2x+4}$.

Выполните действия **(529—530):**

529. 1) $\frac{a+3}{5}+\frac{7+a}{10}+\frac{a-3}{2}$; 3) $\frac{a-2}{45}-\frac{a+5}{15}-\frac{a-9}{9}$;

2) $\frac{b-7}{4}+\frac{5b-2}{3}+\frac{3b-1}{8}$; 4) $\frac{b}{12}-\frac{3b+1}{9}-\frac{2b-1}{4}$.

530. 1) $\frac{y}{n-2}+\frac{z}{2-n}$; 3) $\frac{2m}{3-5n}-1+\frac{7n-4}{5n-3}$;

2) $\frac{p+2q}{3p-q}-\frac{5q-2p}{q-3p}$; 4) $4-\frac{3a}{5-2b}+\frac{5(a-10)}{2b-5}$.

Выполните необходимые действия **(531—533):**

531. 1) $\frac{a^2-2ab+b^2}{a^2-ab+b^2}:\frac{8a-8b}{a^3+b^3}$; 2) $\frac{a^2+2ab+b^2}{a^2+ab+b^2}\cdot\frac{a^3-b^3}{7a+7b}$.

532. 1) $\frac{64x^2-1}{x^2-4}\cdot\frac{(x+2)^2}{x^2-4}\cdot\frac{(x-2)^2}{8x+1}$;

2) $\frac{x-6}{x^2+6x+9}\cdot\frac{x^2+4x+4}{(x^2+2)(x-2)}\cdot\frac{x^3-9x}{(x-6)(x+2)}$;

3) $\frac{am^2-an^2}{m^2+2mn+n^2}:\frac{am^2+2amn+an^2}{3m+3n}$;

4) $\frac{ab-4b-2a+8}{2a+8-ab-4b}:\frac{2a-8-ab+4b}{ab+4b-2a-8}$.

533. 1) $(x^2-1)\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{1+x}+1\right)$; 3) $\left(\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}\right):\left(\frac{x-y}{x+y}+\frac{x+y}{x-y}\right)$;

2) $\left(1+a-\frac{a^2+3}{a+1}\right)(1-a^2)$; 4) $\left(\frac{2-a}{2+a}-\frac{a+2}{a-2}\right):\left(\frac{2+a}{2-a}+\frac{a-2}{a+2}\right)$.

№ 10 *Сумма цифр числа n равна 2006. Можно ли число n представить в виде произведения двух равных множителей?*

Тестовые задания к главе V

1. Сократите дробь: $\frac{27a^2-36ab+12b^2}{9a^2-4b^2}$.

A) $\frac{3(3a-2b)}{3a+2b}$; B) $\frac{3a-2b}{3a+2b}$;

C) $\frac{39-36ab}{5}$; D) $\frac{3a^2-36ab+3b^2}{a^2-b^2}$.

2. Сократите дробь: $\frac{7a^2(ab^2-9a)}{3a(21a-7ab)}$.

A) $\frac{7a(ab^2-9a)}{3(21a-7ab)}$; B) $\frac{-a(b+3)}{3}$;

C) $\frac{7(ab^2-9a)}{3(21-7b)}$; D) $\frac{a(b-3)}{3}$.

3. Выполните действия: $\frac{4}{a+b}+\frac{5}{a-b}-\frac{10b}{a^2-b^2}$.

A) $\frac{9}{a-b}$; B) $\frac{9}{a+b}$; C) $\frac{-9}{a+b}$; D) $\frac{9(a+b)}{a-b}$.

4. Сократите дробь: $\frac{a^2+9}{a^3+27}-\frac{1}{a+3}$.

A) $\frac{1}{a^2+9}$; B) $\frac{3}{a^2+9}$; C) $\frac{a}{a^3+9}$; D) $\frac{3a}{a^3+27}$.

5. Перемножьте дроби: $\frac{9a^2-16b^2}{6a+8b}\cdot\frac{6a^2}{12b-9a}$.

A) a^2; B) $-a^2$; C) $\frac{a^2}{3a-4b}$; D) $\frac{6}{3a+4b}$.

6. Выполните деление: $\frac{4a^2-20ab+25b^2}{5b+4}:\frac{(2a-5b)^2}{25b^2-16}$.

A) $\frac{5b+4}{2a-5b}$; B) $\frac{2a-5b}{5b-4}$; C) $5b-4$; D) $5b+4$.

7. Сократите дробь: $\dfrac{8a^2-22ab+15b^2}{16a^2-25b^2}$.

A) $\dfrac{2a-3b}{4a+5b}$; B) $\dfrac{2a+3b}{4a-5b}$; C) $\dfrac{4a-5b}{4a+5b}$; D) $\dfrac{4a+3b}{2a-5b}$.

8. Выполните вычитание: $\dfrac{9x^2+16}{27x^3+64}-\dfrac{1}{3x+4}$.

A) $\dfrac{9x^2+16}{3x+4}$; B) $\dfrac{-12x}{27x^3+64}$; C) $\dfrac{12x}{27x^3+64}$; D) $\dfrac{9x^2+4}{27x^3-64}$.

9. Выполните действия: $\dfrac{4}{3a+2b}-\dfrac{2}{2b-3a}+\dfrac{8b}{4b^2-9a^2}$.

A) $\dfrac{6}{3a-2b}$; B) $\dfrac{6}{3a+2b}$; C) $\dfrac{12a}{9a^2-4b^2}$; D) $\dfrac{12b}{2b-3a}$.

Исторические сведения

Формулы сокращенного умножения и сведения об алгебраических дробях встречаются в старинных трактатах по математике. Например, в трактате «Аль-Фахри» аль-Караджи и трактате «Китаб аль-джебр валь-мукабала» египетского ученого Абу Камила (850—930) также говорится об алгебраических дробях. Абу Камил был первым после аль-Хорезми, написавшим сочинение по алгебре. В сочинении Абу Камила уделено внимание простым соотношениям типа

$$\left(\frac{a}{b}\right)\cdot b=a,\quad \frac{a}{b}=\frac{a^2}{ab},\quad \frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=1,\quad \frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{a^2+b^2}{ab}.$$

Алгебраическим дробям уделил внимание и И. Ньютон в своем сочинении «Общая арифметика». Ньютон писал: «Дробь $\dfrac{a}{b}$ есть результат деления a на b. Точно так же величина $\dfrac{ab-bb}{a+x}$ есть результат деления $ab-bb$ на $a+x$».

Мы познакомились с начальными понятиями науки Алгебра и их следствиями, основу которым положил наш соотечественник аль-Хорезми.

ГЛАВА V

ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

§ 29 Основные правила комбинаторики

Дорогие учащиеся! В 6-ом классе вы познакомились с первоначальными понятиями комбинаторики, относящимися к правилам сложения и умножения комбинаторики.

Задача 1. Из Самарканда в Ташкент можно доехать четырьмя путями: самолетом, поездом, автобусом или на легковой машине (такси). Из Ташкента в Ходжакент можно добраться тремя транспортами: поездом, автобусом или на такси. Сколькими способами можно доехать из Самарканда в Ходжакент (рис. 22)?

△ Из Самарканда в Ташкент можно доехать четырьмя способами. Доедем до Ташкента, выбрав один из них. Теперь до Ходжакента можно добраться 3 способами. Таким образом, из Самарканда через Ташкент в Ходжакент можно добраться $4 \cdot 3 = 12$ способами.

Ответ: 12 способов. ▲

Вообще, если из города A в город B существует m путей, *а из* B в C n путей, то из A в C существует $m \cdot n$, из A в C можно добраться $m \cdot n$ *различными способами.*

Это правило называется законом умножения и считается основным законом комбинаторики.

Задача 2. В отделе «Все для дома» супермаркета «Sanday» имеется 5 видов чашек, 6 видов блюдец и 4 вида чайных ложек. Тетя Наргиза хочет купить два чайных набора. Сколькими способами это можно сделать?

△ 1) Чашки и блюдца можно выбрать $5 \cdot 6 = 30$ способами; 2) чашки и ложки $5 \cdot 4 = 20$ способами; 3) блюдца и ложки $6 \cdot 4 = 24$ различными способами. Следовательно, чайный набор можно выбрать $30 + 20 + 24 = 74$ способами.

Ответ: 74 способа. ▲

Задача 3. Сколько трехзначных чисел содержат только одну цифру 7?

△ Цифра 7 может находиться на 1-ом, 2-ом и 3-ем месте (на месте единиц, десятков и сотен).

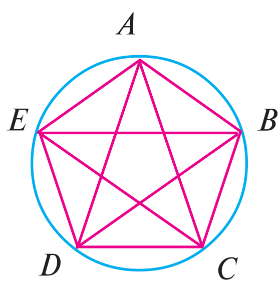
Если цифра 7 находится на 1-ом месте, то 2-ое и 3-ье места можно заполнить $9 \cdot 9 = 81$ способом.

Если цифра 7 находится на 2-ом месте, то на 1-ом месте могут находиться все цифры, кроме 0 и 7, т. е. $10 - 2 = 8$ цифр. На 2-ом месте может располагаться любая цифра, кроме 7, и 3-ье место можно заполнить $9 \cdot 9 = 81$ способом. Следовательно, в этом случае возможны $8 \cdot 9 = 72$ способа.

Если же цифра 7 находится на 3-ем месте, то на 1-ом месте могут быть только 8 цифр, а 2-ом — любые 9 цифр. Следовательно, всего $81 + 72 + 72 = 225$ трехзначных чисел содержат только одну цифру 7.

Ответ: 225 чисел. ▲

Задача 4. На окружности буквами отмечены 5 точек *A, B, C, D, E*. Каждая точка соединена с каждой из остальных. Сколько отрезков получится (рис. 23)?



△ ***1 способ.*** Так как точек немного, то можно построить чертеж, соответствующий задаче и непосредственно посчитать число отрезков, их 10. Но если точек на окружности много (например, 100, ...,), то посчитать невозможно. Тогда можно пойти другим путем.

2 способ. Из каждых 5 выбранных на окружности точек можно провести 4 отрезка к остальным 4 точкам. Их число равно $5 \cdot 4 = 20$, но при подсчете отрезков, мы каждый отрезок считали дважды. Следовательно, нужно 20 разделить на два: $0 : 2 = 10$.

3 способ. Если соединить точку A с остальными 4 точками, то получим 4 отрезка: AB, AC, AD, AE. Из точки B также можно провести 4 отрезка, но один из этих отрезков ($BA = AB$) мы уже считали. Следовательно, из точки B можно провести 3 новых отрезка (проведенный ранее отрезок мы не учитываем). Аналогично, из точки C можно провести 2, а из точки D 1 отрезок. 4 отрезка, проведенных из точки E, уже учитывались ($EA = AE$; $EB = BE$; $EC = CE$; $ED = DE$). Следовательно, общее число отрезков, проведенных из 5, отмеченных на окружности, точек равно $4 + 3 + 2 + 1 + 0 = 10$. ▲

Задача 5. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 3, 4, 5, 6, 8, 9, если: 1) цифры не повторяются; 2) цифры повторяются?

△ 1) Имеется 6 цифр. Любая из них может быть первой цифрой трехзначного числа. Следовательно, имеется 6 возможностей выбора первой цифр трехзначного числа. Тогда второй цифрой может быть любая из 5 оставшихся цифр. То есть, для выбора второй цифры имеется 5 возможностей. Аналогично, для выбора третьей цифры имеется 4 возможности.

Итак, если цифры не повторяются, то общее число трехзначных цифр $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$.

Ответ: 120. ▲

△ 2) Если цифры повторяются, то для выбора 1-ой, 2-ой и 3-ей цифр имеется 6 возможностей, так как заданных цифр 6. В этом случае общее число трехзначных цифр $6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3 = 216$.

Ответ: 216. ▲

534. Наргиза по просьбе своей мамы должна купить в супермаркете „Korzinka. Uz“ 3 вида фруктов. В магазине в наличии 6 видов яблок, 4 вида груш и 5 видов винограда. Сколько различных вариантов фруктов может купить Наргиза, если она купила по 1 кг каждого фрукта?

535. Сколько четырехзначных чисел имеет только одну цифру 5?

536. На окружности отмечены: a) 10; b) 100; c) *n* точек. Каждая точка соединена с каждой из остальных, сколько отрезков получится?

537. 1) 3; 2) 4; 3) 5; 4) 6; 5) 8; 6) 15 друзей обмениваются рукопожатиями. Сколько всего было рукопожатий в каждом случае?

538. 10 друзей хотят провести шахматный турнир между собой. При этом каждый шахматист играет одну партию с остальными. Сколько партий будет проведено в этом турнире?

*Ответьте, чем похожи задачи **536 – 538**?*

539. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, если: 1) цифры не повторяются; 2) цифры повторяются?

540. Сколько a) двузначных; b) трехзначных; c) четырехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5? Рассмотрите случаи, когда цифры повторяются; не повторяются.

541. На чемпионате мира по футболу, на котором разыгрываются золотые, серебряные и бронзовые медали, участвует 16 команд. Сколько различых способов получения медалей командами возможно?

542. В одном государстве 4 города: A, B, C и D. Из города A в город B можно попасть 6 путями, из города B в город C 4 путями. Из A в D 2 путями, из D в C 3 путями. Сколькими путями можно попасть из города A в город C?

543. Число называют „yoqimtoy“, если оно состоит только из нечетных цифр. Сколько существует 1) трехзначных; 2) четырехзначных „yoqimtoy“ чисел?

544. Сколько шестизначных чисел, в записи которых участвует хотя бы одна четная цифра?

Указание: Количество шестизначных чисел, в записи которых участвуют только нечетные цифры равно $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^6 = 15\,625$. Количество всех шестизначных чисел $900\,000$. Количество шестизначных чисел, удовлетворяющих условию задачи $625 = 884\,375$.

545. Сколько имеется десятизначних чисел, в записи которых хотя бы две одинаковых цифры?

546. Для участия в конкурсе „Bilimlar bellashuvi“ нужно выбрать 2 человек из 5. Сколькими способами это можно сделать?

547. На доске написаны 12 существительных, 8 глаголов и 7 прилагательных. Чтобы построить предложение из каждой группы нужно выбрать только одно слово. Сколькими способами это можно сделать?

Рис. 24

Рис. 25

548. 1) Сколькими способами можно расположить на шахматной доске белую и черную ладью так, чобы они не могли «бить» друг друга (рис. 24)?
2) Сколькими способами можно расположить на шахматной доске 8 фигур ладьи так, чобы они не могли «бить» друг друга?

549. Сколькими способами можно расположить на шахматной доске белого и черного ферзя так, чтобы они не могли «бить» друг друга (рис. 25)?

550. Сколькими способами можно расположить на шахматной доске белого и черного короля, не нарушая правила игры?
Указание: рассмотрите 3 случая:
1) белый король находится в углу;
2) белый король находится на краю доски, но не в углу;
3) белый король находится не на краю доски.

551. В школьной столовой имеется белый и черный хлеб и три вида колбасы. Сколько различных видов бутербродов можно сделать из них?

552. Многие государственные флаги имеют 3 разного цвета горизонтальных или вертикальных полос. Сколько различных флагов можно сшить из ткани белого, зеленого и синего цвета?

553. Сколько решений имеет «уравнение» $\bigcirc + \square + \triangle = 10$, если в пустые места вписать цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8? Цифры могут повторяться. Рассмотрите 2 случая (например: 1) 1, 1, 8; 1, 8, 1; 8, 1, 1 разные решения; 2) случаи единственного решения).

554. Чемодан Нодира открывается при помощи кода. Код состоит из 3 цифр не больших 3. Число 13 не входит в код. Сколько различных вариантов надо перебрать Нодиру, если он забыл код?

555. Дверь подъезда высотного дома имеет кодовый замок. Кодом является четырехзначное число, состоящее из 0 и 1 (числа 0000 и 1111 не считаются кодом). Какое наибольшее число различных вариантов, которые надо перебрать, если вы забыли код?
Указание: Сначала нужно подсчитать сколько чисел имеют одну 1, затем две 1 и наконец три 1.

556. Сколькими способами можно взвесить на рычажных весах 20 кг риса, используя гири массой 1кг, 2 кг, 5 кг?

△ Это можно сделать следующими способами:
1) один вариант, используя гири только весом в 1 кг;
2) один вариант, используя гири только весом в 2 кг;
3) один вариант, используя гири только весом в 5 кг;
4) 9 вариантов, используя гири весом в 1 кг и 2 кг:

1 кг гиря	18	16	14	12	10	8	6	4	2
2 кг гиря	1	2	3	4	5	6	7	8	9

5) 3 варианта, используя гири весом в 1 кг и 5 кг:

1 кг гиря	15	10	5
5 кг гиря	1	2	3

6) 2 варианта, используя гири весом в 2 кг и 5 кг: 5 раз по 2 кг и раз по 5 кг;
7) 13 вариантов, используя гири весом в 1 кг, 2 кг, 5 кг:

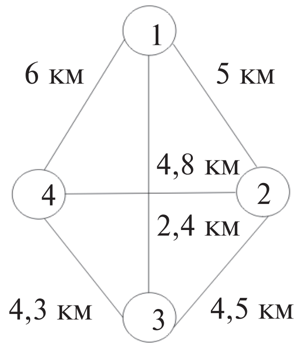
	Число вариантов												
Гири, кг	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1 кг	1	3	5	7	9	11	13	8	6	4	2	3	1
2 кг	7	6	5	4	3	2	1	1	2	3	4	1	2
5 кг	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3

Итак, всего $1 + 1 + 1 + 9 + 3 + 1 + 13 = 29$ вариантов.
Ответ: 29 вариантов.▲

557. 1) Сколькими способами можно разменять 1000 сумов, купюрами достоинством 100, 200, 500 сумов?
2) Сколькими способами можно разменять 500 сумов, купюрами достоинством 100 и 200?
3) Сколькими способами можно разменять 5000 сумов, купюрами достоинством 100, 200, 500 и 1000 сумов?

558. Фирма имеет 4 магазина. Инкасатор (работник, собирающий деньги и сдающий их в банк) собирает деньги со всех магазинов, начиная с первого и опять возвращается к первому). Найдите наиболее короткий маршрут.

Указание: Для каждого маршрута составьте пятизначный код, в котором последняя цифра равна 1. Например, длина маршрута 12431: $5 + 2{,}4 + 4{,}3 + 4{,}8 = 16{,}5$ (км).



559. При прохождении автомашиной госинспекции ей дают код, состоящий из 3 цифр и 3 букв, соответствующих городу или области. Например, код 01 соответствует машине, прошедшей госинспекцию в Ташкенте. Подумайте, каково наибольшее число автомашин, которые могут пройти госинспекцию в Ташкенте?

△ Пусть в кодировании применяют 24 буквы. Номер содержит 6 «мест». На 1-ом «месте» может находится одна из 10 различных цифр, на 2-ом «месте» также может находится одна из 10 различных цифр, а на 3-ем «месте» — одна из 9 различных цифр (3 одинаковые цифры не используются). Для букв на каждом из трех «мест» можно использовать любую из 24 букв. Следовательно, наибольшее число автомашин, которые могут пройти госинспекцию в Ташкенте равно $10 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 24 \cdot 24 \cdot 24 = 24^3 \cdot 900 = 12\,441\,600$.

При таком вычислении не имеет значения, будет ли номер записан в виде „одна буква — трехзначное число — 2 буквы“ или „трехзначное число – 3 буквы“.

Ответ: 12 441 600. ▲

§ 30 Перестановки. Сочетания

Задача 1. Сколькими способами с помощью цифр 4, 7, 9 можно составить трехзначное число, если эти цифры не повторяются?

Такие задачи мы решали в 6-ом классе.

△ На первом месте может находится одно из трех заданных чисел, на втором любое из двух оставшихся чисел, т.е. на втором месте возможны только 2 варианта. Следовательно, количество трехзначных чисел, составленных из 3 цифр $3\cdot2\cdot1 = 3! = 6$. Запишем эти числа:

479, 497, 749, 794, 947, 974.

Состав полученных чисел одинаков — они составлены из трех заданных чисел, но они отличаются друг от друга *порядком* (месторасположением) цифр. Этот порядок называется *перестановкой*.

Размещение на n: 1-, 2-, ..., n- местах n элементов a_1, a_2, ..., a_n, по одному на каждое место называется *перемещением* a_1, a_2, ..., a_n элементов.

Число перемещений из n элементов обозначается P_n. В вышеприведенной задаче элементов было 3, $n=3$ и $P_3 = 3\cdot2\cdot1=3!$ Вообще,
$P_n = n\cdot(n-1)\cdot \ ... \ \cdot2\cdot1= n!$.

Задача 2. Сколько различных пар можно составить из 4 элементов (предметов): a, b, c, d?

△ Составим различные пары из 2 элементов:
$\{a, b\}$; $\{a, c\}$; $\{a, d\}$; $\{b, c\}$; $\{b, d\}$; $\{c, d\}$ — всего 6 пар.

Ответ: 6. ▲

Вообще, число сочетаний из n элементов по k обозначают C_n^k и оно равно $\frac{n!}{k!(n-k)!}$: $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Число C_n^k называется числом сочетаний из n элементов по k. В нашем примере $n=4$, $k=2$. Поэтому, легко показать, что

$$C_4^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4}{1\cdot2\cdot1\cdot2} = 6;$$

$$C_n^k = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}.$$

Действительно,

$$C_n^k = \frac{1\cdot2\cdot...(n-k)\cdot(n-k+1)...n}{k!1\cdot2\cdot...(n-k)} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k!}.$$

Например, $C_5^2 = \frac{5 \cdot 4}{2!} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 10.$

Вместе с этим, $C_5^2 = \frac{5 \cdot 4}{2!} = 10.$

Индекс 2 в обозначении C_5^2 показывает, что в числителе дроби имеется 2 множителя. Нижний индекс обозначения C_5^2 означает, что один из множителей равен 5, а другой число 4 , т.е. на единицу меньше 5. В знаменателе дроби стоит произведение чисел, не больших чем верхний индекс 2: $2! = 1 \cdot 2$.

Задача 3. Сколько точек пересечения имеют диагонали выпуклого шестиугольника? Предполагается, что никакие три диагонали не пересекаются в одной точке. Постройте соответствующий чертеж.

△ Точка пересечения любых 2 диагоналей определяет 4 вершины шестиугольника. Каждые 4 вершины определяют 1 точку пересечения. Следовательно, число точек пересечения равно числу сочетаний из 6 вершин по 4. Это число можно вычислить и по чертежу.

Ответ: $C_6^4 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 15.$ ▲

Числу C_n^k можно дать геометрическое истолкование.

Задача 4. Прямоугольник с измерениями 7×4 можно разбить на $7 \cdot 4 = 28$ квадратиков. Найдите наименьшее число квадратиков, по сторонам которых проходит кратчайший путь из A в B (рис. 26).

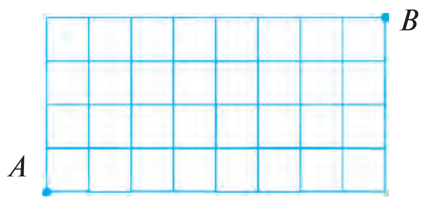


Рис. 26

△ Пусть длина стороны квадратика равна 1 «шагу». Наименьшее число «шагов», по сторонам которых проходит кратчайший путь из A в B равен 11: это 7 «шагов» по горизонтали и 4 «шага» по вертикали. Следовательно, наименьшее число путей состоит из 11 «шагов», 7 из которых по горизонтали, равно числу сочетаний C_{11}^{7}. Именно это число равно выбору количества 4-х вертикальных шагов из 11 шагов. Отсюда следует равенство $C_{11}^{7}=C_{11}^{4}$. Но $C_{11}^{4}=\frac{11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=11\cdot 10\cdot 3=330.$

Ответ: 330. ▲

Если измерения прямоугольника $m\times n$ и этот прямоугольник разбит на $m\cdot n$ квадратиков, то число кратчайших путей из A в B равно $C_{m+n}^{n}=C_{m+n}^{m}$.

Задача 5. Из 7 мальчиков и 4 девочек, нужно выбрать 6 человек так, чтобы число девочек было не меньше 2. Сколькими способами это можно сделать?

△ По условию можно выбрать 2, 3 и 4 девочек. Двух девочек можно выбрать C_4^2 способами, затем выбираем 4 мальчиков C_7^4 способами. По правилу умножения число таких групп $C_4^2\cdot C_7^4$. Если вначале выбрать 3 девочек, тогда число таких групп $C_4^3\cdot C_7^3$. Если же выбрать 4 девочек, то число групп будет равно $C_4^4\cdot C_7^2$. Общее число способов выбора 6 человек равно. ▲

Задача 6. Сколько среди девятизначных чисел, состоящих из цифр 1, 2, 3, ..., 9, в которых цифры 2 и 5 стоят рядом?

△ Возможны следующие случаи: на первом месте 2, на втором месте 5, ..., на восьмом месте 2, на девятом месте 5, число таких случаев 8. Кроме того, поменяем местами 2 и 5. В предыдущих случаях, получим еще 8 случаев (они стоят рядом). Следовательно, поставить числа 2 и 5 рядом можно 16 способами. Каждому из этих случаев соответствует 7! перестановок. Таким образом, число перестановок в которых цифры 2 и 5 стоят рядом равно $2\cdot 8\cdot 7!=2\cdot 8!$ ▲

560. Найдите P_4, P_5, P_6. Что они могут означать?

561. Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр 2, 4, 7, 9, если они не повторяются? Сколько из них делятся на: 2, 4, 11?

562. Сколькими способами можно рассадить 4 друзей, приглашенных на ваш день рождения, на четырех стульях?

563. Вычислите двумя способами 1) C_{10}^4; 2) C_8^3; 3) C_7^5; 4) C_5^3.

564. Покажите непосредственно верность равенств: 1) $C_{10}^7 = C_{10}^3$; 2) $C_8^3 = C_8^5$; 3) $C_6^2 = C_6^4$.

565. Библиотекарь предложила вам на выбор 5 книг. Вы хотите выбрать 3 книги. Сколькими способами это можно сделать?

566. Имеются две параллельные прямые, на одной из которых отмечены 5 точек, на другой 3. Сколько треугольников можно построить, с вершинами в этих точках?

567.

Рис. 27

Для каждой из фигур постройте кратчайший путь из A в B.

568. Сколько четырехзначных чисел существует, где каждая следующая цифра больше предыдущей?

569. Сколько четырехзначных чисел существует, где каждая следующая цифра меньше предыдущей?

570. 5 девушек и 2 юношей решили поиграть в волейбол. Сколькими способами можно разделить их на две команды из 4-х человек, в составе которой был хотя бы один юноша?

571. Имеется 7 яблок и 3 груши. Сколькими способами можно разложить в 2 тарелочки по 5 фруктов так, чтобы на каждой из них была хотя бы 1 груша?

572. В чаше находятся 10 шаров, на которых написаны числа 1, 2, 3, ..., 10. Выбираем 3 из них. В скольких случаях сумма написанных на шарах чисел будет равна 9? В скольких случаях сумма будет больше 9?

573. Имеется 3 курицы, 4 утки и 2 гуся. Выберите из них несколько птиц так, чтобы среди них были курица, утка и гусь. Сколько существует таких возможностей?

574. Имеется 4 белые розы, 5 красных и 3 желтые. Выберите из них несколько роз так, чтобы среди них были белая, красная и желтая розы. Сколько таких вариантов существует?

575. Сколько среди восьмизначных чисел состоящих из цифр 1, 2, 3, ..., 8, в которых цифры не повторяются и цифры 1 и 8 стоят рядом?

576. У цветочника осталось 5 красных и 10 белых гвоздик. Азамхон хочет подарить своей сестре букет, состоящий из 2 красных и 3 белых гвоздик. Сколькими способами это можно сделать?

577. Предприниматель хочет дать объявление о своей фирме в 5 газетах из 8. Сколько различных способов выбора 5 газет существует?

578. На окружности отмечены 20 точек. Найдите число: 1) хорд; 2) треугольников; 3) выпуклых четырехугольников с концами в этих точках.

579. На одной из двух параллельных прямых отмечено 8, а на другой 11 точек. Найдите число выпуклых четырехугольников с концами в этих точках.

580. В верхнее село ведет 6 дорог. Сколько различных вариантов имеет турист, чтобы подняться наверх и спуститься вниз? Сколько различных вариантов имеет турист, если он спускается вниз по другой дороге?

Проверьте себя!

1. В футбольном чемпионате участвуют 18 команд. Сколько матчей будет проведено, если каждая команда проводит матч на своей территории и на территории соперника?

2. В 7 классе проводят уроки по 12 предметам. В понедельник по расписанию 5 различных уроков. Сколькими способами можно составить расписание уроков на понедельник?

3. Сколькими способами можно рассадить трех учащихся на 5 стульях?

4. Сколькими способами можно расставить 5 различных книг по математике?

Упражнения к главе VI

581. Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, если: 1) цифры повторяются; 2) цифры не повторяются?

582. Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр 0, 3, 4, 5, 6, 7?

583. На столе лежат учебники по родному языку, алгебре, геометрии и английскому языку. Малохат хочет сложить их на книжную полку. Сколькими способами она может это сделать?

584. Обычно вершины треугольника обозначают заглавными буквами латинского алфавита. Латинский алфавит содержит 26 букв. Сколькими способами можно обозначить вершины треугольника?

585. Сколькими способами можно рассадить трех учащихся на 8 стульях?

586. Номер домашнего телефона абонента состоит из 7 цифр и начинается с 218. Сколько абонентов может обслужить такая телефонная станция?

587. Сколькими способами можно выбрать для участия в соревнованиях 2 из 5 фехтовальщиков?

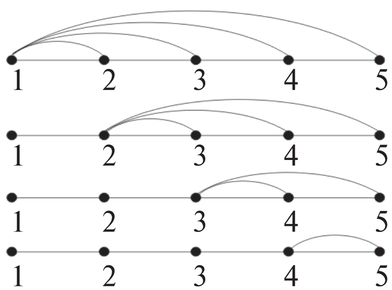
Решение Али: Имеется 5 способов выбора 1 фехтовальщика. Остается 4 фехтовальщика из них по одному можно выбрать 4 способами. Следовательно, $5 \cdot 4 = 20$.

Ответ: $5 \cdot 4 = 20$ способов.

Решение Назимы: Пронумеруем 5 фехтовальшиков и составим из них пары по 2 человека: 12; 13; 14; 15; 23; 24; 25; 34; 35; 45.

Ответ: Можно выбрать 10 способами.

Решение Мубинабону:



4 пары: 12; 13; 14; 15;

3 пары: 23; 34; 45;

2 пары: 34; 35;

1 пары: 45.

Всего $4 + 3 + 2 = 10$. *Ответ:* 10 способов.

Чье решение верное? Чье решение вам понравилось? Чем понравилось?

588. Ваш ровесник пишет стихи и говорит: «Пока я любитель, а когда вырасту, то стану большим поэтом». Одно из стихотворений он назвал «Тюльпан». Первая строка этого стихотворения: «Весной на холмах раскрылись тюльпаны». Остальные строки являются перестановками слов первой строки. Каким может быть наибольшее число строк этого «стихотворения»?

589. Сколько шестизначных чисел, в которых: 1) четвертая цифра 5; 2) последняя цифра четная; 3) вместо нечетных номеров нечетные цифры; 4) вместо нечетных цифр стоят четные цифры.

590. Телефонная станция обслуживает 450 000 абонентов с 6-значными телефонными номерами.
1) Сколько еще абонентов может обслужить станция?
2) Может ли она обслужить еще 62 000 абонентов?

591. На прямой отмечены: 1) 4; 2) 6; 3) 10; 4) n точек. Сколько отрезков получится в каждом случае?

592. Начертите окружность и отметьте на ней 4 точки. Сколько дуг при этом получилось? Раскрасьте дуги цветными карандашами. Сколько цветных карандашей понадобится?

593. В меню кафе «Райхон» имеется 3 вида самсы, 4 вида первого и 5 видов второго. Сколько комплексных обедов можно составить из этих 3 блюд?

594. Имеется 2 яблока, 2 груши и 2 персика. Три друга выбирают себе по 2 фрукта. Сколько всего таких способов выбора существует?

595. Айдын выбирает к Наврузу два из 4 фасонов платьев, сшитых из 5 различных видов адраса. Сколько различных способов выбора платьев существует?

596. Сколько имеется пятизначных чисел, все цифры которых: 1) четные; 2) нечетные?

Тестовые задания к главе VI

1. Сколько шестизначных чисел делится на 5?

A) $18 \cdot 10^4$; B) $9 \cdot 10^4$; C) $5 \cdot 6!$; D) $6 \cdot 5^4$.

2. Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, если они могут повторяться?

A) 8^5; B) 5^8; C) $8^2 \cdot 5^3$; D) $5^4 \cdot 8$.

3. Имеются две параллельные прямые, на одной из которых отмечены 4 точки, а на другой 3. Сколько можно построить треугольников, с вершинами в этих точках?

A) 30; B) 33; C) 40; D) 32;

4. Сколькими способами можно рассадить трех учащихся на 6 стульях?

A) 120; B) 130; C) 100; D) 480.

5. Сколькими способами можно выбрать из 11 членов футбольной команды капитана и его помощника?

A) 110; B) 55; C) 22; D) 121.

6. Из Богистона в Ташкент можно доехать двумя путями, а из Ташкента в Ургенч четырьмя. Сколько путей ведут из Богистона в Ургенч?

A) 8; B) 10; C) 6; D) 12.

7. Из 12 белых и 13 красных роз нужно составить букеты, состоящие из двух белых и трех красных роз. Сколькими способами это можно сделать?

A) 18 876; B) 156; C) $12^2 \cdot 13^3$; D) 25.

8. Сколькими способами из 10 активистов математического кружка можно выбрать 4 учащихся для участия в Международной олимпиаде?

A) 210; B) 200; C) 40; D) 10^4.

9. У одного учащегося есть 7 занимательных книг по математике, а у другого 9 по художественной литературе. Сколькими способами учащиеся могут обмениваться по одной книге?

A) 63; B) 49; C) 81; D) 126.

10. На день рождения к Отабеку пришли 9 друзей. Все они обменялись рукопожатиями с Отабеком и между собой. Сколько всего было рукопожатий?

A) 45; B) 90; C) 10; D) 50.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ КУРСА АЛГЕБРЫ 7 КЛАССА

597. Найдите числовое значение выражения:

1) $2\frac{7}{8}+5\frac{5}{6}+7\frac{1}{8}+\frac{5}{6}$; 2) $13\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{7}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{7}$.

598. Верно ли равенство:

1) $\dfrac{2-\frac{3}{5}+0,7}{1\frac{4}{5}-1+0,4}=\dfrac{7}{4}$; 2) $\dfrac{\left(\frac{4}{7}-7-0,2\right)\cdot 3,5}{2,26}=-10$;

3) $\left(\dfrac{4,752}{3,2}+\dfrac{0,608}{3,8}\right):\left(7,5-\dfrac{3,55}{1,42}\right)=0,0617$?

599. Одно из двух чисел равно a, а второе на 7 больше первого. Запишите удвоенное произведение этих чисел. Вычислите значение этого произведения при $a=\frac{1}{2}$.

600. Сумма двух чисел равна 30. Одно из чисел a. Запишите удвоенное произведение этих чисел. Вычислите значение этого произведения при $a=-2$.

601. Составьте формулу, показывающую, сколько единиц содержится в натуральном числе, состоящем из a сотен, b десятков и c единиц. Сколько единиц в числе, написанном теми же цифрами, но в обратном порядке?

602. Сколько граммов содержат a килограммов и c граммов? Ответ запишите формулой, обозначив число граммов буквой x.

603. Из одного камыша сделали 8 дудочек длиной 6 см. Из другого камыша такой же длины сделали 5 дудочек. 3 см камыша осталось не использовано (рис. 28). Какой длины были дудочки, сделанные из второго камыша?

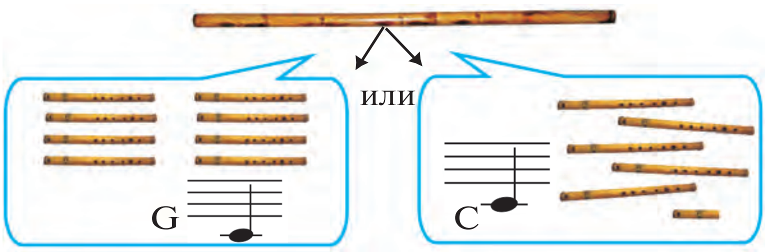


Рис. 28

604. Из одного камыша сделали 7 дудочек длиной 6 см. Из другого камыша такой же длины сделали несколько дудочек, при этом 2 см камыша остались не использованными (рис. 29). Сколько дудочек можно сделать из второго камыша? (Длина дудочки выражается натуральным числом и оно ≥ 3 см.)

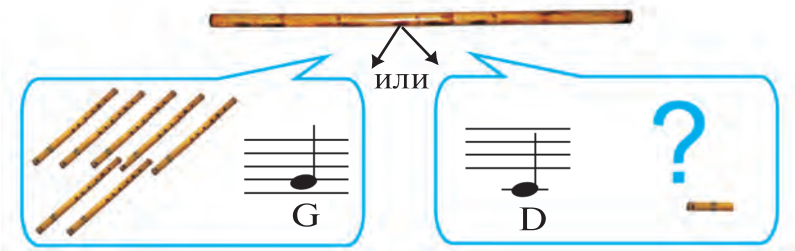


Рис. 29

605. На рисунке 30 сторона внутреннего квадрата на 20 см короче стороны внешнего. Найдите стороны квадратов, если площадь закрашенной части равна 800 см^2.

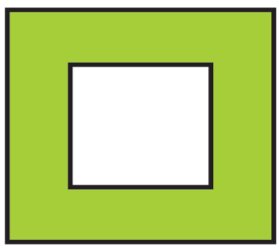


Рис. 30

606. Упростите выражение:

1) $2a^2+2ab+3b^2-a^2-2b^2$;

2) $7a^2+2b^2-\left(6a^2+b^2\right)$;

3) $\frac{2}{3}a^2-b^2+\frac{4}{3}a^2-\frac{5}{7}b^2$;

4) $\frac{1}{7}a^2b\cdot 23m-\frac{2}{7}a^2bm$.

607. Найдите числовое значение выражения:

1) $5a^2-2ab+6a-7ab-6a^2-6a$, где $a=5$, $b=-\frac{1}{9}$.

608. Умножьте многочлен на одночлен:

1) $\left(a^2-ab+b^2\right)\cdot 3ab^3$;

2) $\left(6a^2-4ab^2+1\right)\cdot\frac{1}{2}ab$.

609. Перемножьте многочлены:

1) $\left(a^2+3ab+b^2\right)(7a-5b)$;

2) $(a+3b-4c)(a-3b-4c)$;

3) $\left(\frac{1}{3}a^2b-\frac{2}{5}ab^2\right)(15a-30b)$;

4) $\left(\frac{1}{2}a^2+4a+1\right)(3a-1)$.

Решите уравнение **(610—614):**

610. 1) $4(2x-1)+3(1-2x)=7$;

2) $4(x+2)-2(3x-2)=14x-5(x+3)$.

611. 1) $\frac{x-2}{4}-\frac{1}{2}=\frac{x+7}{6}$;

2) $\frac{2(3x-1)}{5}=4-\frac{x+2}{2}$.

612. 1) $7-\frac{x}{2}=3+\frac{7x}{2}$;

2) $\frac{x+3}{2}=x-4$.

613. 1) $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{6}=12$;

2) $\frac{2x-1}{5}-\frac{x+1}{5}=\frac{3(1-x)}{10}$.

614. 1) $\frac{6x+7}{7}+\frac{3+5x}{8}=3$;

2) $5-\frac{2x-5}{3}=\frac{4x+2}{3}$;

3) $1+x=\frac{5x-2}{2}$;

4) $\frac{1-x}{9}-1=7x$.

615. В трех коробках 119 карандашей. В первой коробке на 4 карандаша больше, чем во второй, и на 3 меньше, чем в третьей. Сколько карандашей в каждой коробке?

616. Отцу 30 лет, а сыну 4 года. Через сколько лет отец будет втрое старше сына?

617. Сыну 6 лет, а отец старше его в 6 раз. Через сколько лет сын будет моложе отца в 4 раза?

618. Два велосипедиста выехали одновременно из двух сел навстречу друг другу. Первый двигался со скоростью 15 км/ч, а второй —12 км/ч. Через какое время они встретятся, если расстояние между селами равно 40,5 км?

619. Два велосипедиста выехали одновременно из двух сел в одном направлении. Первым ехал второй велосипедист, следом за ним — первый. Скорость первого велосипедиста 15 км/ч, второго — 12 км/ч. Через какое время первый велосипедист догонит второго, если расстояние между селами 4,5 км?

Упростите **(620—622):**

620. 1) $(a+1)(a-1)(a^2+1)$; 2) $\left(\frac{a}{2}-5\right)\left(5+\frac{a}{2}\right)+25$.

621. 1) $(a+3)^2+(a-3)^2$; 2) $(4a+b)^2-(4a-b)^2$.

622. 1) $(1-a)(1+a+a^2)+a^3$;

2) $\left(\frac{1}{2}-c^2\right)\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}c^2+c^4\right)+c^6$.

Разложите на множители **(623—624):**

623. 1) $a^4+6a^3+9a^2$; 2) $25-(2-3a)^2$.

624. 1) $(a+1)^2-(4-3a)^2$; 3) $(2a+b)^2-9(a+b)^2$;

2) $(8b-1)^2-(2b+3)^2$; 4) $4(a-2b)^2-25(3a-b)^2$.

625. Упростите дробь:

1) $\frac{a^2-16}{a^2-8a+16}$; 2) $\frac{4x^2-9}{2x+3}$.

Выполните действия **(626—629):**

626. 1) $\frac{b+3}{5}+\frac{7+b}{10}+\frac{b-3}{2}$; 2) $\frac{a^2+5a-4}{16-a^2}+\frac{2a}{8a+2a^2}$.

627. 1) $\frac{a}{a^2-1}-\frac{1}{1-a^2}$; 2) $\frac{4x^2}{2x-3y}+\frac{12xy}{3y-2x}+\frac{9y^2}{2x-3y}$.

628. 1) $\frac{a-b}{ab}-\frac{a-c}{ac}$; 2) $\frac{1}{14x^3}-\frac{1}{21x^2y}+\frac{1}{4xy^2}$.

629. 1) $\frac{x^2-y^2}{6xy}\cdot\frac{12x^2y}{x+y}$; 2) $\frac{a^2+4a}{a^2-16}:\frac{4a+16}{a^2-4a}$.

Выполните действия **(630—632)**:

630. 1) $\left(\frac{a}{a+1}+1\right):\left(1-\frac{a}{a+1}\right)$; 2) $\frac{1-a^2}{1+b}\cdot\frac{1-b^2}{a+a^2}\cdot\left(1+\frac{a}{1-a}\right)$.

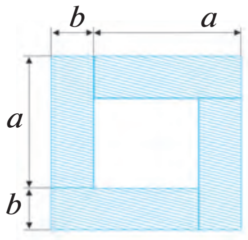
631. 1) $1+3a+\frac{9a^2}{1+3a}+\frac{1}{3a-1}+\frac{6a}{1-9a^2}$;

2) $\left(\frac{a+b}{a-b}+\frac{a-b}{a+b}\right):\left(\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}+\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)$.

632. 1) $\left(\frac{9m^2-3n^2}{4m^2}-\frac{m-4n}{5m}\right):\left(\frac{2m+n}{3m}-\frac{5n^2-3m^2}{16m^2}\right)$;

2) $\left(\frac{a+4b}{2b}+\frac{6b}{4b-a}\right)\left(1-\frac{a^2-2ab+4b^2}{a^2-4b^2}\right)$.

633. Как связаны равенства 1) $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$;
2) $(a+b)^2+(a-b)^2=2\left(a^2+b^2\right)$ с числами, изображенными на рисунке 31?



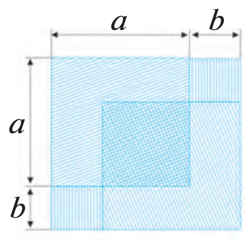


Рис. 31

634. Турист выехал на велосипеде из Дома отдыха, расположенного на берегу реки Кук-су, и направился в соседний Дом отдыха, намереваясь доехать туда за некоторое время. Сначала он за 1 час проехал 10,5 км. Если бы он и дальше ехал с такой же скоростью, то прибыл бы на место назначения на 1 час позже. Поэтому он оставшийся путь проехал со скоростью 15 км/ч и прибыл на место назначения на полчаса раньше. Найдите расстояние между Домами отдыха.

635. Сейчас 5 часов. Через сколько времени минутная стрелка часов «догонит» часовую?

636. Цифра десятков двузначного числа в 4 раза больше цифры единиц. Ученик должен был умножить число 507 на это двузначное число, но записал цифры двузначного числа в обратном порядке, поэтому произведение оказалось меньше правильного ответа на 27 378. Найдите правильный ответ.

637. Вес сплава из меди и цинка равен 36 Н. При погружении в воду он теряет $4\frac{1}{3}$ Н своего веса, при этом медь теряет $11\frac{1}{9}\%$, а цинк $14\frac{2}{7}\%$ своего веса. Определите вес меди и вес цинка в сплаве.

638. Масса сплава, состоящего из серебра и меди, равна 3,5 кг. Масса серебра составляет $16\frac{2}{3}\%$ массы меди. Найдите массу серебра в сплаве.

639. В трех мешках 120 кг муки. Мука в первом мешке составляет $\frac{3}{5}$ части муки во втором, а мука в третьем мешке равна 80 % муки во втором мешке. Сколько килограммов муки в каждом мешке?

640. Ахмад из села *A* в село *B* ехал на велосипеде со скоростью 14 км/ч, а на обратном пути — со скоростью

10 км/ч. Найдите расстояние между селами, если на обратный путь Ахмаду потребовалось времени на 1 час больше.

641. Вертолет пролетел расстояние между двумя поселками при попутном ветре за 1,5 ч, а при встречном ветре — за 2 ч. Каково расстояние между поселками, если скорость ветра была равна 10 км/ч?

642. Заводской цех должен был выполнить план по изготовлению однотипных деталей за 10 дней. Но уже за день до срока он не только выполнил задание, но и изготовил сверх плана 3 детали, так как ежедневно изготовлял сверх плана по 2 детали. Сколько деталей должен был изготовить заводской цех по плану за 10 дней?

643. 1) Ученики 7 класса Ахмад и Карим приняли участие в велогонке. Ахмад ехал со скоростью 15 км/ч, а Карим 18 км/ч. Карим приехал к финишу на 20 минут раньше Ахмада. Сколько километров составляет длина дистанции?

2) Турист, пройдя половину пути, решил отдохнуть. Затем он прошел еще 0,4 своего пути. Подсчитав свой путь, он понял, что прошел 27 км. Сколько километров составляет намеченный туристом путь?

644. *(Задачи Аль-Хорезми.)*

1) Отношение одного числа к другому равно $\frac{13}{25}$. Найдите эти числа.

2) Один человек сделал такое распоряжение: у меня есть 10 дирхем (денежная единица). Еще я давал в долг одному человеку. Величина долга равна величине наследства, которое я оставляю моему сыну. Брату я оставляю $\frac{1}{5}$ часть всего наследства и еще 1 дирхем. Какое наследство получат сын и брат этого человека?

Выполните действия **(645—648):**

645. 1) $\left(\frac{c-d}{c^2+dc}-\frac{c}{d^2+cd}\right):\left(\frac{d^2}{c^3-cd^2}+\frac{1}{c+d}\right)$;

2) $\left(\frac{2n}{k+2n}-\frac{4n^2}{k^2+4nk+4n^2}\right):\left(\frac{2n}{k^2-4n^2}+\frac{1}{2n-k}\right)$;

3) $\left(\frac{b^2}{b+x}-\frac{b^3}{b^2+x^2+2bx}\right):\left(\frac{b}{b+x}-\frac{b^2}{b^2-x^2}\right)$;

4) $\left(\frac{2q}{2q+m}-\frac{4q^2}{4q^2+4mq+m^2}\right):\left(\frac{2q}{4q^2-m^2}+\frac{1}{m-2q}\right)$.

646. 1) $1+a-\frac{a-1}{a}+\frac{a^2-1}{2a}-\frac{3a}{2}$;

2) $\frac{m+1}{m^2+m+1}-\frac{2}{1-m}+\frac{3m^2+2m+4}{1-m^3}$;

3) $\frac{m+n}{3}-m+2n$;

4) $m+n-\frac{2m-n}{5}-\frac{m+n}{2}$.

647. 1) $\frac{a^3+2a^2}{a^2-1}\cdot\frac{(a+1)^3(a-1)}{a^2(a+2)}$;

2) $\frac{(a^2+ab)^2}{a^2-b^2}:\frac{(a+b)^2}{(ab-b^2)^2}$.

648. 1) $1,5\cdot\left(2b-\frac{3b}{7}\right)-1\frac{5}{7}\cdot(3b-5)+\frac{9b^2-16}{4-3b}$;

2) $\frac{x+3a}{x+a}-\frac{x}{x-a}+\frac{2a^2-ax+x^2}{a^2x^2}:\frac{x^2-a^2}{a^2x^2}$.

Решите уравнения **(649—650):**

649. 1) $\frac{4x-3}{2}-\frac{5-2x}{3}-\frac{3x-7}{6}=0;$ 2) $\frac{x+4}{5}-\frac{x+3}{3}=x-5-\frac{x-2}{2}.$

650. 1) $(2x-3)(x+5)-(3-x)(5-2x)=-30;$

2) $5(x-1)^2-2(x+3)^2=3(x+2)^2.$

651. Автомобиль прошел расстояние от города до села со скоростью 80 км/ч. Возвращаясь, он прошел 75% расстояния с прежней скоростью, а оставшийся путь — со скоростью 60 км/ч. Поэтому он затратил на обратный путь на 10 мин больше времени, чем на путь от города до села. Найдите расстояние между городом и селом.

652. Лодка шла против течения реки 4,5 ч и по течению реки 2,1 ч. Путь, пройденный лодкой, составил 52,2 км. Найдите скорость лодки в стоячей воде, если скорость течения реки равна 3 км/ч.

653. С двух станций, расстояние между которыми 340 км, одновременно выехали навстречу друг другу 2 поезда. Скорость первого больше скорости второго на 5 км/ч. Найдите их скорости, если известно, что через 2 часа после того, как они выехали, расстояние составляло 30 км.

654. Найдите числовое значение выражения:

1) $(x-y)(x+y)(x^2+y^2)-8x^3+9y^2$, если $x=2$, $y=3$;

2) $-\frac{2}{3}(x-1)^2-2\frac{1}{3}(x-3)(x+3)$, если $x=3$.

655. Сколько четырехзначных чисел содержит цифру 1?

656. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 5, 8, если эти цифры не повторяются?

657. Вычислите: 1) C_{10}^4; 2) P_7.

658. Сколькими способами можно рассадить 6 гостей на 6 стульях?

ОТВЕТЫ К УПРАЖНЕНИЯМ

1. 2) 7; 4) 5,86. **2.** 2) $\frac{9}{56}$; 4) 0,5. **4.** 2) неверно; 4) неверно. **5.** $40\cdot0{,}03 = 6 : 5$. **6**. 2) $3\cdot(2 + 6)=2\cdot(2\cdot6)$. **8.** 2) $\frac{9}{56}$; 4) $4\frac{6}{7}$; **9**. 2) $-0{,}02$; 4) 3. **10.** 2) 0; 4) 5. **11.** 2) -2; 4) 0. **12**. $(7m)$т; 168 т. **13**. 1) $(60m)$ мин.; 2) $\frac{p}{60}$ мин; 3) $(60m + l + \frac{p}{60})$ мин. **14.** $3(x - y)$; 2) 4,5; 4) 2,5. **15.** $(x + y)(x - y)$; 2) $-\frac{11}{64}$; 4) 0,104. **16.** 2) $-1\frac{2}{3}$. **17.** 2) 4. **18.** 1, 3, 15, 21. **19.** 2) $(m - 1)m$; 4) $(2p + 1)(2p + 3)(2p + 5)$. **21.** $(p - q)$ t; 1) 5t; 2) не может быть больше $q\ p$; может равняться $q\ p$. **22**. $400n + 500m$; 155000; 155000. **24.** 187200 м^3, $(37440m)$ м^3. **25.** $s = 3\frac{1}{6}c + 1\frac{2}{3}a + 2\frac{1}{2}b$, 53 км. **26.** 2) $a-b$; 4) $2mn$; 6) $(a+b)(a-b)$. **28.** 5000; 150000. **29.** $3a$; $8a$; $10a$; 500; 400; $\frac{sa}{100}$. **30.** 2) 30 кг. **31.** 2) $(5k)$ км. **32.** $(50a)$ кг. **33.** $(15a)$ га. **34.** $(x\cdot6 + y\cdot3)$ сумов. **35.** $(a\cdot15 + b\cdot20)$ кг. **36.** $(km + cn)$ кг. **37.** $S = a(a - b)$. **38.** $mn + k$; 810 мест. **39.** 4 ч 35 мин. **40.** b) $p =(m + n)\cdot2$; $S = mn - xy$; e) $p = 2(a + m + n + x)$, $S = mn - ab - xy$. **41.** 2) $2(2a+4)m$; 3) $(a+8)(a-4)m^2$. **42.** $\frac{s}{t-1}$ км/ч. **44.** $\frac{a-1500}{20}$ м^2. **45.** $500(100 + p)$ сумов. **47.** $t = \frac{s-3}{v}$, не успеет. **49.** 2) 40; 4) -41. **50.** 2) $3y-2x$; 4) $8{,}7 - 2\frac{1}{3}m + 1\frac{2}{3}n$. **51.** 2) $3 - 2{,}7b$; 4) $\frac{2}{3}y + \frac{1}{3}b - 3$; 6) $5p$. **52.** 2) $x + 5$; 4) $58c + 14d$. **53.** 2) 67,048; 4) $-11{,}221$. **54.** 2) 0,28; 4) $7\frac{37}{112}$. **55.** 2) $-4-9+11$; 4) $2a-3b-4c$. **57.** 2) $2 + b + (-c)$; 4) $3 + a + (-b) +(-c)$. **58.** 2) $a-2b+3c$; 4) $-a + 2b - 3c$. **59.** 2) $a - b + c - d$; 4) $a - b - c + d - k$. **60.** 2) $8x - 2y$; 4) $3a - 3$. **61.** 2) $a - 2b + (m + c)$; 4) $a + (-m + 3b^2 - 2a^3)$. **62.** 2) $2a + b - (-m - 3c)$; 4) $a-(m - 3b^2 + 2a^3)$. **63.** 2) $a-(b-1)$; 4) $(a-2b)+8$. **65.** 2) $c + (-a + b)$; 4) $n+(-d+l)$. **66.** 2) $4a - 4b$; 4) $5x - 3y$. **67.** 2) $x =1$; 4) $x =5$. **68.** 2) $-1{,}16$; 4) -3. **69.** 2) -1; 4) 9; 6) 9; 8) 3,9. **70.** 2) 147; 4) 144. **71.** 2) -132; 4) 7. **72.** 2) 1,08; 4) 6,12. **73.** 2) 12; 4) -1. **78.** 6 дирхемов. **80.** 2) 3. **85.** 2) $x=-27$; 4) $x=1{,}009$. **86.** 2) $x = \frac{5}{7}$; 4) $x = \frac{2}{3}$. **87.** 2) $x =-1{,}3$; 4) $x =0{,}05$. **88.** 2) $x = 64$; 4) $x = 1$. **89.** 2) $x = -\frac{4}{25}$; 4) $x = -\frac{1000}{3}$. **90.** 2) $x = \frac{3}{7}$; 4) $x = \frac{1}{3}$. **91.** 2) $x =17$; 4) $y =-1$. **92.** 2) $x = 7\frac{1}{2}$; 4) $y =24$. **93.**

2) $z = 6$; 4) $x = 0,6$. **94.** 2) $y = 13$; 4) $x = 1$. **95.** 2) $y = 319$; 4) $x = 5$. **96.** 2) $x = 37$; 4) $x = 1,1$. **99.** 2) $x = 1$; 4) $x = 1$. **100.** 2) $x = 0,2$; 4) $x = 4$. **102.** 2) 12 человек. **103.** 2) 144, 432, 216. **104.** 2) 8, 8, 6. **105.** 2) 20, 40. **106.** 25, 27, 29. **107.** 4, 6, 8 и 10. **108.** 2) 12 изделий в час **109.** 89,6 м. **110.** 7 ta. **111.** 2) 2 кг. **112.** 2) 40 кг. **113.** 2) 150 машин. **115.** 1) 0,2 части; 2) 0,25 части. **116.** 83,6 кг, 508, 8 кг, 1327 кг. **117.** 8 км/ч. **123.** 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^5$; 4) $(-2,7)^4$. **124.** 2) m^5; 4) $(-3b)^4$. **125.** 2) $(a+b)^2$; 4) $\left(\frac{m}{n}\right)^5$. **126.** 2) $4^4 \cdot 21$; 4) $6^2 \cdot 7^2 \cdot 3^3$. **127.** 2) $(0,5)^3 \cdot 2^2 \cdot 4^2$; 4) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot (2,3)^2$. **128.** 2) $x^4 \cdot 3^2$; 4) $\left(\frac{a}{b}\right)^2 (8a-b)^3$. **129.** 2) $a^2 + b^4$; 4) $2x^3$. **130.** 2) na^3; 4) $5^k + a^{17}$. **132.** 2) 9; 4) 125. **133.** 2) -1; 4) 0. **134.** 2) $\frac{9}{25}$; 4) $12\frac{19}{27}$. **135.** 2) 2,89; 4) $\frac{1}{625}$. **136.** 2) -125; 4) $-5\frac{1}{16}$. **137.** 2) 270; 4) 4. **138.** 2) 40; 4) -6. **139.** 2) 18; 4) 72. **140.** $-2\frac{1}{4}$, $2\frac{1}{4}$, $-3\frac{3}{8}$; -25, 25, 125. **146.** 2) 7^6; 4) 5^6. **147.** 2) a^7; 4) $(3b)^7$. **148.** 2) $(-3)^4$; 4) $(-1,2)^7$. **149.** 2) 3^{10}; 4) $(-6)^{12}$. **150.** 2) $\left(\frac{2}{3}\right)^8$; 4) b^{15}. **151.** 2) $\left(\frac{-5x}{6}\right)^{12}$; 4) $(n+m)^{20}$. **152.** 2) 3^{8+n}; 4) a^{n+13}. **154.** 2) 2^2; 4) 2^7. **155.** 2) 2^6; 4) 2^{10}. **156.** 2) 2^{14}; 4) 2^9. **157.** 2) 2^{23}; 4) 2^{4+n}. **158.** 2) 3^1; 4) 3^4. **159.** 2) 3^5; 4) 3^7. **160.** 2) 3^{18}; 4) 3^6. **161.** 2) 3^{n+1}; 4) 3^{3+n}. **162.** 2) 4^2; 4) 10^8. **163.** 2) $\frac{1}{17}$; 4) d^{12}. **164.** 2) $(2a)^2$; 4) $(m+n)^5$. **165.** 2) 2^2; 4) 2^2. **166.** 2) 2^3; 4) 2^9. **167.** 2) 3^3; 4) 3. **168.** 2) 3^2; 4) 3^4. **169.** 2) 6; 4) 25. **170.** 2) 44; 4) 9. **171.** 2) -6; 4) 12. **172.** 2) $x = 64$; 4) $x = 27$. **173.** 2) $x = 16$; 4) $x = 4$. **174.** 2) $x = 243$; 4) $x = 9$. **175.** 2) a^{56}; 4) a^{21}. **176.** 2) a^{15}; 4) a^{23}. **177.** 2) a^9; 4) a^{12}. **178.** 2) $n = 7$; 4) $n = 2$. **179.** 2) $\left(\frac{5}{6}\right)^2$; 4) $(0,02)^2$. **180.** 2) $(7^3)^2$; 4) $\left(\left(-\frac{2}{3}\right)^{12}\right)^2$. **181.** 2) $(b^3)^2$; 4) $(x^{10})^2$. **182.** 2) $7^5 \cdot 6^5$; 4) $4^3 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^3$. **183.** 2) $81x^4$; 4) $64b^2$. **184.** 2) 6^6y^6; 4) $27n^3m^3$. **185.** 2) $x^7y^7z^7$; 4) $2^9 \cdot 4^9 \cdot 9^9$. **186.** 2) a^6b^3; 4) $0,01c^6$. **187.** 2) $512a^{12}b^{21}$; 4) $16n^4m^{12}$. **189.** 2) $(3,4 \cdot b)^4$; 4) $\left(-\frac{2}{3}a\right)^2$. **190.** 2) $(9 \cdot r)^2$; 4) $(15 \cdot a \cdot b)^3$. **191.** 2) $(a^2b^3)^2$; 4) $(9m)^2$. **192.** 2) $(xy^2z^4)^2$; 4) $(10c^4x^3)^2$. **193.** 2) $(0,7nm^5)^2$; 4) $\left(\frac{4}{25}a^5b^8\right)^2$. **194.** 2) $(b^3)^3$;

4) $(4^2)^3$. **195.** 2) $\left(\left(-\frac{2}{3}\right)^5\right)^3$; 4) $(-0,1)^3$. **196.** 2) $(a^2b)^3$; 4) $(x^4y^3z^2)^3$. **197.** 2) $(-10b^2)^3$; 4) $(-0,2xy^3)^3$. **198.** 2) 1; 4) -1. **199.** 2) 1; 4) $\frac{1}{32}$. **200.** 2) 144; 4) 14. **201.** 2) 1; 4) 4. **202.** 2) 14; 4) 16. **203.** 2) $\frac{25}{49}$; 4) $\frac{b^3}{8^3}$. **204.** 2) $\frac{169}{n^2}$; 4) $-\frac{64}{c^3}$. **205.** 2) $\frac{81b^4}{625c^4}$; 4) $\frac{5^6}{7^{12}}$;. **206.** 2) $\frac{49}{(2+c)^2}$; 4) $\frac{(a+b)^7}{(a-b)^7}$. **207.** 2) $(\frac{2}{5})^5$; 4) $\left(\frac{5}{a}\right)^7$. **208.** 2) $\left(\frac{a}{b}\right)^3$; 4) $\left(\frac{7}{10}\right)^2$. **209.** 2) $\left(\frac{4x}{3y}\right)^4$; 4) $\left(-\frac{1}{3}\right)^3$. **212.** 1) $\cong 3,3\cdot 10^5$ раз; 2) $\cong 9$ yil. **213.** 2) $\frac{3}{10}$. **214.** 2) 3^{5n+2}; 4) b^{4n}. **215.** 2) 7; 4) 5. **216.** 2) $81x^8y^6z^{14}$; 4) $-2,48832a^{15}b^{10}c^{20}$. **217.** 2) a^2; 4) a^4. **218.** 2) $10^{20} > 20^{10}$; 4) $3^{40} > 6^{20}$. **220.** 2) $\frac{1}{3}$; 4) 13,2. **221.** 2) $8,647\cdot 10^6$. **222.** 2) $3bc$; 4) ab^2. **223.** 2) $3a^2b$. **224.** 2) $100n$ (см). **226.** 2) 8; 4) 1; 6) 18. **227.** 2) z^{11}; 4) m^4; 6) $72\,p^3q^2$; **228.** 2) 2. **229.** $\frac{12}{25}$ дня. **230.** 2) $6ab$; 4) $-2a^3$. **231.** 2) $35m^2n$; 4) $-4b^5$. **232.** 2) $-2m^3n$; 4) $\frac{5}{14}b^3c^2$. **233.** 2) $28x^3y^3$; 4) $2a^2b^2c^2$. **234.** 2) $-21a^6b^6c^2$; 4) $-\frac{9}{8}a^4x^3y^4$. **235.** 2) $-7,5m^7r^7n^5$; 4) $-7,5a^5b^7c^7$. **236.** 2) $-15m^3n^2$; 4) $-26a^4b^4c^5$. **237.** 2) $30a^4b^3$; 4) $4a^3b^2c^3$. **238.** 2) $25b^2$; 4) $4a^6$. **239.** 2) $16a^2b^2$; 4) $-8x^3y^3z^3$. **240.** 2) $-a^{10}b^5c^5$; 4) $16x^8y^{12}$. **241.** 2) $\frac{1}{81}m^8n^8$. **242.** 2) $-2a^4$; 4) $a^2b^5c^2y^2$. **243.** 2) x^5y^5; 4) $-4a^{10}b^{11}$. **244.** 2) $(4x^2)^2$; 4) $(9x^3y)^2$. **245.** 2) 204,8; 4) 1,008. **246.** $7\frac{1}{5}$ пяди. **250.** 2) $6a^2b^3-24a^4b$; 4) $-bc^5+5x^2y^4$. **251.** 2) $-6xy^4z-$ $-20m^3n^2k^3$; 4) $\frac{1}{3}a^2b^2-2a^2b^3$. **252.** 2) 2; 4) 0. **253.** 2) $-7,6$; 4) -252. **254.** 2) $\frac{1}{3}y$; 4) $\frac{13}{16}a^2b$. **255.** 2) $2a+b$; 4) $2a^2-3b^2$. **256.** 2) $-y$; 4) $3,8a^2$. **257.** 2) a^2; 4) $2xy-$ $-2,2y^2$. **258.** 2) $-\frac{7}{8}ab^2+\frac{3}{8}a^2b$; 4) $4x-2,46y$. **259.** 2) $x^3-x^2y-xy^2$. 4) ab^2+2ab. **260.** 2) $8b^2-19bc-15c^2$; 4) $2x^2y$. **261.** 2) $-\frac{1}{3}a^2bc-4a^2c$. **262.** 2) $3x+3y$; 4) $3x+1$. **263.** 2) $5a^2-b^2$; 4) $-\frac{1}{2}b^2+1\frac{1}{4}$. **264.** 2) $0,1c^2$; 4) $6a+22b$. **265.** 2) $-2a^2-$ $-6ab+6b^2$; 4) $25z+30az^2$. **266.** 2) $-2b$; 4) $9x^3$. **267.** 2) $3x^2$; 4) $8a^2-b^2-ab$. **268.** 2) $-0,07x^2+0,06y^2$; $0,27x^2-0,1y^2$; 4) $0,61a^3+1,12b^3$; $1,39a^3-0,88b^3$. **269.** 2) $3x^2+3x^2y^2-x^3$. **270.** 2) $-5b^2+3b$. **271.** 2) q^3; 4) $-5ab+8b^2$. **273.** $k+2m-n$.

274. 2) $1-\frac{1}{2}x$; 4) $20m-30n$. **275.** 2) $-10xz+8yz$; 4) x^3-x^2+x. **276.** 2) $75a^2b^2+15a^2b$; 4) $3x^2y^3-6x^4y^2$. **277.** 2) $16ab^2-24a^2bc+8abc^2$; 4) $x^3yz+2xy^3z+3xyz^3$. **278.** 2) $a^3b^7+\frac{3}{4}a^4b^4$. **279.** 2) $-3a+7b$; 4) $-14p-9$. **280.** 2) $-a^2b+6b^2$; 4) $19x-12$. **281.** 2) $2x-3,5$; 4) $0,5y-1,7$. **282.** 2) 5; 4) 204. **283.** 2) z^2+3z-4; 4) $bc+4c+5b+20$. **284.** 2) $-a^2+8a+20$; 4) $p-q+pq-q^2$. **285.** 2) $10a^2+7a-12$; 4) $20p^2-17pq+3q^2$. **286.** 2) $0,09-m^2$; 4) $0,04a^2-$ $-0,25x^2$. **287.** 2) $30x^4+30y^4-61x^2y^2$; 4) x^3+5x^2+7x+3. **288.** 2) $27a^3-8b^3$; 4) $27a^3+8b^3$. **290.** 2) $0,3x^2+xz-0,3y^2+yz$; 4) $0,3a^4-0,9a^3+2a^2+3a-10$. **291.** 2) $a^3-ab^2+3a^2b-3b^3$; 4) $12x^3-29x^2+7x+6$. **295.** 2) y^4; 4) 1. **296.** 2) $-3a$; 4) $-5c$. **297.** 2) $\frac{2}{15}a$; 4) $-9c$. **298.** 2) $9m$; 4) $\frac{4}{5}b$. **299.** 2) 8; 4) 7. **300.** 2) 3; 4) -3. **301.** 2) $-\frac{5}{3}$; 4) $-1,3$. **302.** 2) $-\frac{5}{3}p$; 4) $0,4c$. **303.** 2) $7m^6$; 4) $\frac{7}{6}$. **304.** 2) $\frac{9}{4}ab^2$; 4) $3ab$. **305.** 2) $-\frac{1}{13}axy^2$; 2) $\frac{1}{2}a^3b$. **306.** 2) $81x^4y$; 4) $x^7y^{11}z^3$. **307.** 2) $2b-1$; 4) $2-x$. **308.** 2) $4a-3b$; 4) $-c+1$. **309.** 2) $-\frac{2}{3}cb-1$; 4) $-\frac{1}{4}ab+\frac{3}{4}a^2$. **310.** 2) $-2x-3y+4$; 4) $a+3a^2b-2$. **311.** 2) 1; 4) $-3a$. **312.** 2) 200 м; 2400 м^2. **313.** 2) a^3; 4) c^2+3^2. **314.** 2) n^2-m^2; 4) $(\frac{1}{2})^3-b^3$. **315.** $4c$ см, c^2 м^2. **317.** $3x^2$ илиі $\frac{1}{3}x^2$. **318.** 10 км. **319.** 108000. **320.** Нет. **321.** 2) $3,08\cdot10^{13}$. **322.** $5,1\cdot10^8$; 10^{12}. **323.** 10 kg. **324.** 2) xy; 4) $10mn^2k$. **325.** 2) $13\frac{3}{4}$. **326.** 2) $3x^2$; 4) $8a^2+b^2-ab$. **327.** 2) $0,5x^2+xz-0,5y^2+yz$; 4) $a^4-2a^3+3a^2+4a-10$. **328.** 2) $2a^3-$ $-2ab^2+3a^2b-3b^3$; 4) $6x^3-17x^2-4x+3$. **329.** 2) $5x^3+8x^2+9x-1$; 4) $1\frac{1}{4}a^5+2a^2x-$ $-1\frac{1}{2}x^2$. **332.** 2) 180,7; 4) 12,5. **333.** 2) $2x^2-2x$; 4) $a^3+ab-a^2b^2-b^3$. **334.** 240 км. **336.** 2) $3(a-x)$; 4) $6(a+2)$. **337.** 2) $2(4a-2b-1)$; 4) $3(3x-y+4z)$. **338.** 2) $c(d+b)$; 4) $x(3-y)$. **339.** 2) $3b(d-a)$; 4) $3p(2k-1)$. **340.** 2) $x(y-$ $-x+z)$; 4) $4b(b+2a-3a^2)$. **341.** 2) $a^3(a-3)$; 4) $x^2y^2(y-x)$. **342.** 2) $6x^2(x^2-4)$; 4) $3a^2(2a^3+1)$. **343.** 2) $4x^2y(5xy+1)$; 4) $3xyz(3z-4y)$. **344.** 2) $5a^3(4a-1+3a^2)$; 4) $2x^2y^2(y^2-x^2+3xy)$. **345.** 2) 18700; 4) $-1,62$. **346.** 2) $(a+5)(b-c)$; 4) $(y-3)(1+b)$. **347.** 2) $(m-3)(3n+5m)$; 4) $(c-d)(7a-2b)$. **348.** 2) $(x+y)(a^2-b^2)$; 4) $(a^2-2b^2)(x+y)$. **349.** 2) $(p-q)(c-a+d)$; 4) $(x^2+1)(m-n-l)$. **350.**

2) $(b-c)(a+c)$; 4) $(x-y)(2b+1)$. **351.** 2) $(a-2)(6-a)$; 4) $(m-2)(a^2-b)$. **352.** 2) $(x-y)(x-y-3)$; 4) $(3-b)(-a+1-b)$. **353.** 2) $x=1$; 4) $x=0{,}49$. **354.** Успеет. **355.** 2) $(m-n)(1+p)$; 4) $(x-y)(1+2a)$. **356.** 2) $(a-b)(a-b+1)$; 4) $(p-1)(4q+p-1)$. **357.** 2) $(p-1)(4q+1)$; 4) $(p-1)(4q-1)$. **358.** 2) $(b+c)(a+d)$; 4) $2(x-1)(3x-4y)$. **359.** 2) $(c+d)(a-3b)$; 4) $(a-3b)(x+5y)$. **360.** 2) $(b+c-a)(y-x^2)$; **361.** 2) 12500; 4) 28. **362.** 2) $-0{,}625$; 4) $-0{,}33$. **363.** 2) 906. **364.** 2) $t=-7$, $t=4$. **365.** 2) $x^2-2xy+y^2$; 4) x^2+2x+1; 6) $49+14m+m^2$. **366.** 2) x^2-6x+9; 4) $y^2-12y+36$; 6) $b^2+b+\frac{1}{4}$. **367.** 2) $9x^2+12xy+4y^2$; 4) $25z^2-10zt+t^2$. **368.** 2) a^4+2a^2+1; 4) $x^4+2x^2y^2+y^4$. **369.** 2) $a^2-\frac{2}{3}a+\frac{1}{9}$; 4) $\frac{x^2}{9}+\frac{xy}{6}+\frac{y^2}{16}$. **370.** 2) $0{,}16b^2-0{,}4bc+0{,}25c^2$; 4) $\frac{1}{16}a^6-\frac{2}{5}a^3+\frac{16}{25}$. **372.** 2) $9b^4+12ab^3+4a^2b^2$; 4) $16x^2y^2+4xy^3+0{,}25y^4$. **373.** 2) 1681; 4) 9604. **374.** 2) 1006009; 4) 1521. **375.** 2) 3249; 4) 1002001. **376.** 2) $4xy$; 4) $8a^2+2b^2$. **377.** 2) $7a^2-52a+112$; 4) $4x^2-16x-4$. **378.** 2) $x=2$; 4) $x=-0{,}5$. **379.** 2) $y=3$; 4) $y=\frac{2}{3}$. **380.** 2) -11; 4) -17. **382.** 2) $(5+x)^2$; 4) $(p-0{,}8)^2$. **386.** 2) p^2-q^2; 4) m^2-n^2. **387.** 2) a^2-9; 4) x^2-49. **388.** 2) c^2-9d^2; 4) $9m^2-4n^2$. **389.** 2) $\frac{25}{36}a^2-b^2$; 4) $\frac{4}{9}m^2-\frac{9}{16}n^2$. **390.** 2) a^4-b^6; 4) m^6-n^6. **393.** 2) $25a^2b^4-4a^4b^2$; 4) $a^2b^6-16x^2y^2$. **394.** 2) x^4-1; 4) $81a^4-16b^4$. **395.** 2) 4896; 4) 2491. **396.** 2) 1584; 4) 39999. **397.** 2) $2a^2+4a$; 4) $24ab-32b^2$. **399.** 2) $x=\frac{4}{3}$; 4) $y=\pm2$; $y=3$. **400.** На 64 см^2 уменьшится. **401.** -10. **402.** 2) 980; 4) 5,87. **405.** 2) $(2a-3)(2a+3)$; 4) $(9a-4b)(9a+4b)$. **406.** 2) $(ab-4)(ab+4)$; 4) $(4x-5y)(4x+5y)$. **407.** 2) $(\frac{2}{3}a-\frac{1}{4}b)(\frac{2}{3}a+\frac{1}{4}b)$; 4) $(0{,}3x-0{,}4y)(0{,}3x+0{,}4y)$. **408.** 2) $(xy^2-4)(xy^2+4)$; 4) $(5a-3b^3)(5a+3b^3)$. **409.** 2) $(a^2-b^4)(a^2+b^4)$; 4) $(b^2-9)(b^2+9)$. **410.** 2) $(m-n-k)(m-n+k)$; 4) $3(x-y)(3x+y)$. **411.** 2) $(a+2b+c)(a-c)$; 4) $4(2a-b)(-a-2b)$. **412.** 2) $(1+c)^2$; 4) $(9-x)^2$. **413.** 2) $(10-3a)^2$; 4) $(a+5b)^2$. **414.** 2) $(p^2-q)^2$; 4) $(5a^3+3b)^2$. **415.** 2) $(b^2-9)^2$; 4) $(4-a^2b^2)^2$. **416.** 2) $-(3-b)^2$; 4) $-3(a+2b)^2$. **417.** 2) 60 000; 4) 216. **418.** 2) $x=\frac{1}{2}$, $x=-\frac{1}{2}$; 4) $x=5$.

419. 2) 10000; 4) $\frac{2}{3}$. **420.** 2) $x^2 + 2xy + y^2$; 4) $x^2 - 2xy + y^2$. **421.** $(c + d)(c^2 - cd + d^2)$; 4) $(a - 3)(a^2 + 3a + 9)$; 6) $(a + 1)(a^2 - a + 1)$; 8)$(5 - b)(25 + 5b + b^2)$.
422. 2) $(4 - 5y)(16+20y+25y^2)$; 4) $(4y + \frac{1}{3})(16y^2 - \frac{4}{3}y + \frac{1}{9})$. **423.** 2) $(1 + 3b)(1 - 3b + 9b^2)$; 4) $(\frac{1}{2}a^2 + 5b)(\frac{1}{4}a^4 - \frac{5}{2}a^2b + 25b^2)$. **424.** 2) $(a + b)(a - b)\times(a^4 + a^2b^2 + b^4)$; 4) $(2 + y)(2 - y)(16 + 4y^2 + y^4)$. **425.** 2) $y^3 + 8$; 4) $64c^3 - 125d^3$.
426. 2) $a^6b^6 - 125a^3$; 4) $\frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{27}y^3$. **427.** 2) $16a^2(4a + 5b)$; 4) $(a-b)(a^2 + ab + b^2 + a - b)$. **428.** 2) 0,02. **429.** 2) $8x+7$. **430.** 2) $x = 3$; 4) $x = 0,2$. **441.** 2) $x = 2$. **442.** 2 км/ч, 16 км/ч. **443.** 2) $(x - y)(4 + 3x - 3y)$; 4) $(b - a)(b - a - 1)$. **444.** 2) $y(x + y)^2$; 4) $(b - a)^2(a - 1)$. **445.** 2) $24x^2(y - z)$; 4) $4(2x - y)(2x - 3y - 1)$. **446.** 2) $5(x+y)(2x+1)$; 4) $(3z^2 + 2y^2)(16x - 5y)$. **447.** 2) $(2nk + 5m)(3mk - 7n^2)$; 4) $(5c-3x)(8b-3c)$. **448.** 2) $16x + 2$; 4) $-19y + 6$. **450.** 2) $\frac{5}{8}$; 4) $\frac{11}{8}$. **454.** $\frac{a^2-b^2}{(a-b)^2}$.
456. 2) 5; 4) 1,9; 6) 4. **457.** 2) $V = \frac{m}{p}$; 4) $a = \frac{p}{2} - b$. **458.** $x = \frac{np}{1000a}$, $x = 3$. **459.** $t = \frac{a}{cn}$, $t = 15$. **461.** 2) $\frac{4}{5}$, 4) -2. **462.** 2) $\frac{2}{3}$; 4) $\frac{b}{2c}$. **463.** 2) $\frac{1}{b^4}$; 4) b^2. **464.** 2) $\frac{2}{7}$; 4) $\frac{b}{3a}$; 6) $\frac{a^2b}{5c}$. **465.** 2) $\frac{7a}{5}$; 4) $\frac{1}{3(a-b)}$; 6) $-\frac{1}{3}$. **466.** 2) $\frac{1}{(m+n)^3}$; 4) $3y - 2x$; 6) $\frac{2}{a(a-b)}$. **467.** 2) $\frac{2a}{m-n}$; 4) $\frac{4a-1}{2a+3}$; 6) $\frac{1+b}{1-b}$. **468.** 2) $\frac{q^2}{p-q}$; 4) $\frac{m}{n}$; 6) $-\frac{x}{y}$. **469.** 2) $\frac{3a+2b}{2a+3b}$; 4) $-\frac{1}{ab}$. **470.** 2) $\frac{1}{a+b}$; 4) $5+x$; 6) $-\frac{c+2}{2a}$. **471.** 2) $10 - 7b$; 4) $\frac{y}{5+y}$; 6) $\frac{5ab}{a^2-b^2}$. **472.** 2) $\frac{1}{b+7}$; 4) $\frac{1}{1-2p}$. **473.** 2) $\frac{4a+1}{4a-1}$; 4) $\frac{10(m+n)}{3(m-n)}$. **474.** 2) $n - m$; 4) $\frac{1}{5-2x}$. **475.** 2) $\frac{3y-4x}{3y+4x}$; 4) $\frac{6-c}{6+c}$; 6) $\frac{3c-2b}{a}$. **476.** 2) $a+1$; 4) $\frac{1}{2}$. **477.** 2) $\frac{b}{ab}$ и $\frac{2a}{ab}$; 4) $\frac{2a}{2b}$ и $\frac{a}{2b}$; 6) $\frac{32}{60}$ и $\frac{25}{60}$. **478.** 2) $\frac{9x^2}{12xy}$, $\frac{72}{12xy}$ и $\frac{16y^2}{12xy}$; 4) $\frac{2ax^2}{4x^3}$ и $\frac{b}{4x^3}$. **479.** 2) $\frac{6b^2}{2b}$ и $\frac{a^2}{2b}$; 4) $\frac{2b^2}{6ab}$, $\frac{9ac}{6ab}$, $\frac{6a^2b^2}{6ab}$. **480.** 2) $\frac{3a^2}{18a^2b^2}$, $\frac{2(a^2+b^2)}{18a^2b^2}$ и $\frac{a(3-a^2)}{18a^2b^2}$; 4) $\frac{21y^3}{60x^4y^4}$, $\frac{310x^3y}{60x^4y^4}$ и $\frac{80x^2}{60x^4y^4}$. **481.** 2) $\frac{6a}{(a-1)a}$ и $\frac{2(a-1)}{(a-1)a}$;

4) $\frac{8a^2}{12(a+1)}$ и $\frac{15a^2}{12(a+1)}$. **482.** 2) $\frac{7a(3x+y)}{9x^2-y^2}$ и $\frac{6b(3-y)}{9x^2-y^2}$; 4) $\frac{6x}{8x+8y}$ и $\frac{x}{8x+8y}$. **483.** 2) $\frac{7a}{x^2-9}$ va $\frac{a(x-3)}{x^2-9}$; 4) $\frac{6x(x+y)}{x^2-y^2}$, $\frac{7xy(x-y)}{x^2-y^2}$ и $\frac{3}{x^2-y^2}$. **484.** 2) $\frac{28c(b+c)}{70(b^2-c^2)}$, $\frac{6a^2}{70(b^2-c^2)}$ и $\frac{35b(b-c)}{70(b^2-c^2)}$; 4) $\frac{15x(x+1)}{12x(x^2-1)}$; $\frac{-48x^2}{12x(x^2-1)}$ и $\frac{4(x-1)}{12x(x^2-1)}$. **485.** 2) $\frac{5a}{b^3}$; 4) $\frac{x-y}{n+a}$. **486.** 2) $\frac{2a}{c^2}$; 4) $\frac{7}{a^2}$; 6) $\frac{8}{ab}$. **487.** 2) $\frac{11}{28}$; 4) $\frac{3}{5b}$; 6) $\frac{3ad-b}{12d}$. **488.** 2) $\frac{15+ab}{5a}$; 4) $\frac{2+7b}{b}$. **489.** 2) $\frac{2c+4c^2-3}{c^2}$; 4) $\frac{mn-kn^2+m^2}{n^2}$. **490.** 2) $\frac{k-n}{mnk}$; 4) $\frac{bd+ba}{acd}$; 6) $\frac{2n^2-3m}{mn^3}$. **491.** 2) $\frac{4a^4-21cb^3}{18a^3b^4}$; 4) $\frac{20y-21x+22}{28x^2y^2}$; 6) $\frac{b(cd^2+d+c)}{(cd)^2}$. **492.** 2) $\frac{3x}{2(1-x)}$; 4) $\frac{8y-25x}{10(y-3)}$. **493.** 2) $\frac{11}{10(b+1)}$; 4) $\frac{5x}{8(x+y)}$. **494.** 2) $\frac{5b^2-2a^2}{ab(x+y)}$; 4) $\frac{a+b-y}{ab}$. **495.** 2) $\frac{2(2a+3)}{a(1-a)}$; 4) $\frac{67b-3a}{40(a^2-b^2)}$. **496.** 2) $\frac{x-1}{x^2-9}$; 4) $\frac{2x^2+3x+2}{x^2-16}$. **497.** 2) $\frac{6n-47}{n^2-49}$; 4) $\frac{24y^2+y+1}{1-9y^2}$. **498.** 2) $\frac{13a+4}{(3a+1)^2}$. **499.** 2) $\frac{2-11x}{(3x+1)^2}$; 4) $\frac{4-7n+7m}{(n-m)^2}$; 6) $\frac{2x^2+18}{(x^2-9)^2}$. **500.** 2) $\frac{b^2-3b}{b-2}$; 4) $\frac{1}{a+1}$. **501.** 2) $-\frac{1}{x+y}$; 4) $\frac{2(24-a)}{4a^2-9}$. **502.** 2) $\frac{b-3b^2-14}{6(b^2-1)}$; 4) $\frac{28n^2-4m^2+9mn}{m(4n^2-m^2)}$; 6) $\frac{4a^2-4a-b}{a^2+2a}$. **503.** 2) $\frac{2a}{a^3+8}$; 4) $-\frac{6m}{m^3-27}$. **504.** 2) $-\frac{2}{19}$. **505.** 2) $\frac{4}{13}$; 4) $\frac{15}{2}$. **506.** 2) $\frac{k^2}{mn}$; 4) $\frac{3mk}{4nd}$; 6) $\frac{2a^2b^2}{c^3}$. **509.** 2) 2; 4) $\frac{a}{bc}$; 6) $\frac{ac}{b}$. **510.** 2) $\frac{k^2}{mn}$; 4) $\frac{3md}{2nk}$; 6) $\frac{15a^2c^2}{d}$. **511.** 2) $\frac{18a^2}{7}$; 4) $\frac{1}{a}$; 6) $\frac{a^3b^3}{d^2}$. **512.** 2) $\frac{2y}{5c^3}$; 4) $\frac{2d^2a^2}{3c}$; 6) $\frac{22p^3n}{m^4}$. **513.** 2) $10a^2b$; 4) $\frac{1}{4a^2b}$. **514.** 2) $\frac{2b}{a}$; 4) $3b$; 6) $\frac{(a+b)a}{3b}$. **515.** 2) $\frac{b}{3(1+a)}$; 4) $\frac{1}{3m^2(m+n)}$; 6) $\frac{5}{3(a-b)}$. **516.** 2) $\frac{-3x^2(x+y)}{2(x^2+y^2)}$; 4) $\frac{-18(n-m)^2(n+m)}{n(n+p)^2}$;

6) $\frac{1}{a^2-b^2}$. **517.** 2) $b-3$; 4) $(a-1)(2a-1)$. **518.** 2) $\frac{2(a+1)}{3}$; 4) 1; 6) $\frac{b^2}{b^2+1}$.
519. 2) $\frac{a^2(b^2-1)}{b^2}$; 4) $\frac{2(m+n)}{n}$. **520.** 2) $\frac{4ab}{a^2-b^2}$; 4) $\frac{1}{6(c+d)}$. **521.** 2) $\frac{9z}{z+2}$; 4) $\frac{m+5}{m-2}$.
522. 2) $\frac{b}{a+b}$; 4) $\frac{1}{c}$. **523.** 2) $\frac{4}{a-b}$; 4) $\frac{1}{c(a+b)}$. **526.** $\frac{v-v_1}{v+v_1}\cdot s$ км. **527.** По 6 .
528. 2) $\frac{3(x^2-2x+4)}{x^3+8}$, $\frac{x+1}{x^3+8}$ и $\frac{(x+2)^2}{x^3+8}$. **529.** 2) $\frac{55b-61}{24}$; 4) $\frac{5-27b}{36}$. **530.**
2) $\frac{7q-p}{3p-q}$; 4) $\frac{8a+8b-70}{2b-5}$. **531.** 2) $\frac{a^2-b^2}{7}$; 4) $\frac{m+n}{2(p^2-pc+c^2)}$. **532.**
2) $\frac{x(x+2)(x-3)}{(x-2)(x+3)(x^2+2)}$; 4) 1. **533.** 2) $-2(a-1)^2$; 4) $\frac{a^2+4}{4a}$. **534.** 120. **536.**
d) $n(n-1):2$. **538.** 45. **539.** 2) 900. **541.** $16\cdot 15\cdot 14 = 3360$. **542.** 30. **543.**
1) 125; 2) 625. **545.** 24. **546.** 10. **547.** $12\cdot 8\cdot 7 = 672$. **548.** 1) $64\cdot 49 = 3136$;
2) 8! **550.** 1) $4\cdot 60$; 2) $24\cdot 58$; 3) $36\cdot 55$; Всего 3612 случаев. **551.** 6. **552.**
12. **554.** 20. **555.** 14 ta. **561.** Можно составить 24 четырехзначных числа.
562. 24. **565.** 10. **566.** 45. **568.** 56. **569.** 6. **570.** $C_6^4=C_6^2=15$. **572.** В $C_{10}^3-4=116$
случаях сумма будет больше 9. **573** $\left(C_3^1+C_3^2+C_3^3\right)\cdot\left(C_4^1+C_4^2+C_4^3+C_4^4\right)\times$
$\times\left(C_2^1+C_2^2\right)=315$ ta. **576.** $C_5^2\cdot C_{10}^3=1200$. **578.** 1) $C_{20}^2=190$; 2) $C_{20}^3=1140$;
3) $C_{20}^4=4845$. **579.** $8\cdot C_{11}^2+11\cdot C_8^2=748$. **580.** 36; 30. **581.** 1) $5\cdot 5\cdot 4\cdot 3 = 300$;
2) $5\cdot 6\cdot 6\cdot 6 = 1080$. **582.** $5\cdot 6\cdot 6\cdot 3 = 540$. **583.** $4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 24$. **584.** 2. **585.**
$8\cdot 7\cdot 5 = 280$. **586.** 10 000. **588.** 24. **589.** 1) 90000; 2) 450000; 3) 125000; 4) 100000.
590. 2) нельзя. **591.** 1) 6; 2) 15; 3) 45; 4) $n\cdot(n-1):2$. **593.** $3\cdot 4\cdot 5 = 60$. **594.** 4.
595. 40. **596.** 1) 2500; 2) 3125. **597.** 2) 2. **598.** 2) неверно. **599.** $7\frac{1}{2}$. **600.**
$2a(30-a)$; -128. **601.** $a\cdot 100 + b\cdot 10 + c$; $c\cdot 100+b\cdot 10+a$; a ta. **602.** $x=1000a + c$.
606. 4) $3a^2bm$. **609.** 4) $1{,}5a^3 + 11{,}5a^2-a-1$. **610.** 2) $x=2\frac{5}{11}$. **614.** 4) $x=-\frac{1}{8}$.
615. 40, 36, 43. **616.** Через 9 лет. **617.** Через 4 года. **618.** Через 1,5 часа.
619. Через 1,5 часа. **620.** 2) $\frac{a^2}{4}$. **621.** 2) $16ab$. **623.** 2) $3(1 + a)(7 -3a)$. **624.**

2) $4(3b-2)(5b+1)$; 4) $(17a-9b)(b-13a)$. **634.** 63 км. **635.** Через $27\frac{3}{11}$ мин. **636.** 41574. **637.** Медь — 25,5N; цинк — 10,5 N. **638.** $\frac{1}{2}$ кг. **640.** 35 км. **641.** 120 км. **642.** 150 . **644.** 2) сыну $5\frac{5}{6}$ дирхам, брату $4\frac{1}{6}$ дирхам. **645.** 2) $\frac{2n(2n-k)}{2n+k}$; 4) $\frac{2q(m-2q)}{m+2q}$. **646.** 4) $\frac{m+7n}{10}$. **648.** 2) 1. **649.** 2) $x=6$. **650.** 2) $x=-\frac{25}{34}$; 4) $x=-6{,}5$. **651.** 160 км. **652.** 9 км/ч. **653.** 80 км/ч; 75 км/ч. **654.** 2) $-2\frac{2}{3}$.

Ответы к заданиям «Проверьте себя!»

Глава I. **1.** 1) 120,3; 2) $-3\frac{1}{6}$; **2.** $3x+4y$; $\frac{1}{3}$. **3.** $10a+15b$.

Глава II. **1.** Да, $x=-4$; **2.** 1) $x=\frac{1}{3}$; 2) $x=3$. **3.** 30 %.

Глава III. **1.** 5^5; 3^2; 2^{12}; 6^5. **2.** $3b+d$. **3.** $-1{,}25\,a^4b^3c^2$; $0{,}7m-2n-1$. **4.** $3m^2-4$; $-3{,}8125$.

Глава IV. **1.** $2a^2+12a$. **2.** 1) $y(x-2)$; 2) $(4a-9)(4a+9)$; 3) $3x^2\cdot(1-2x)$; 4) $(x-5)^2$; 5) $(x-1)(3+y)$; 6) $2(a-b)^2$. **3.** $(a-3b)(a+3)$; 8.

Глава V. **1.** $b\neq 0$, $a\neq 1$, $b\neq -2$. **2.** 1) $\frac{1}{a}$; 2) $\frac{4ab}{a^2-b^2}$; 3) 4; 4) $\frac{a-b}{b}$. **3.** $\frac{1}{x-3}$; -3.

Глава VI. **1.** $18\cdot 17=306$. **2.** $12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8=87480$. **3.** $5\cdot 4\cdot 3=60$. **4.** $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5=120$.

Ответы к занимательным задачам

1. $99+9:9$. **2.** 44 треугольника, 10 квадратов, 8 прямоугольников. **3.** 5 лет. **4.** 18 минут. **5.** 1) 6; 2) 3; 3) 4; 4) 9. **6.** 24 000 км. **7.** 6. **8.** 1) 7; 2) 4 мальчика, 3 девочки. **9.** 10 м. **10.** Нельзя.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава IV. РАЗЛОЖЕНИЕ МНОГОЧЛЕНА НА МНОЖИТЕЛИ

Глава V. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ДРОБИ

Глава VI. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

Алимов Ш. А. и др.

22.14
А 50

Алгебра: учебник для 7 классов школ общего среднего образования /Ш.А. Алимов, А.Р. Халмухамедов, М.А. Мирзахмедов. /— 4-е издание. Т.: ИПТД „O‘qituvchi“, 2017. — 192 с.

ISBN 978-9943-22-101-7

УДК: 512(075.3)
ББК 22.14я72

SHAVKAT ARIFDJANOVICH ALIMOV,
ALIMDJAN RAXIMOVICH XALMUXAMEDOV,
MIRFAZIL ABDILXAKOVICH MIRZAXMEDOV

ALGEBRA

Umumiy o‘rta ta’lim maktablarining
7- sinfi uchun darslik

Qayta ishlangan va to‘ldirilgan

4- nashri

Перевод с узбекского **Г. Э. Юсуповой**

Издательско-полиграфический творческий дом «O‘qituvchi»
Ташкент — 2017

Редактор *Д. Рахимова*
Художественный редактор *Ш. Адилов*
Технический редактор *С. Набиева*
Компьютерная верстка *М. Салимовой*

Издательская лицензия AI № 291. 04.11.2016. Подписано в печать с оригинала-макета 03.07.2017. Формат $70\times90^1/16$. Кегль 11 н/шп. Гарнитура Таймс. Печать офсетная. Бумага офсетная. Усл. п. л. 14,04. Учетно-издательские л. 9,5.
Тираж 60 381 экз. Заказ №

Издательско-полиграфический творческий дом «O‘qituvchi» Узбекского агентства по печати и информации. Ташкент, массив Юнусабад, ул. Янгишахар, дом 1.
Договор № 49-17.

Сведения о состоянии учебника, выданного напрокат

№	Имя, фамилия ученика	Учебный год	Состояние учебника при получении	Подпись классного руководителя	Состояние учебника при сдаче	Подпись классного руководителя
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Таблица заполняется классным руководителем при передаче учебника в пользование и возвращении назад в конце учебного года. При заполнении таблицы используются следующие оценочные критерии:

Новый учебник	Состояние учебника при первой передаче
Хорошо	Обложка цела, не оторвана от основной части книги. Все страницы в наличии, не порваны, на страницах нет записей и помарок.
Удовлетворительно	Обложка не смята, слегка испачкана, края стерты. Удовлетворительно восстановлен пользователем. Вырванные страницы восстановлены, но некоторые страницы исчерчены.
Неудовлетворительно	Обложка испачкана, порвана, корешок оторван от основной части книги или совсем отсутствует. Страницы порваны, некоторых вообще не хватает, имеющиеся исчерчены. Учебник к дальнейшему пользованию не пригоден, восстановить нельзя.

22.14
A 50

Алимов Ш. А. и др.

Алгебра: учебник для 7 классов школ общего среднего образования /Ш.А. Алимов, А.Р. Халмухамедов, М.А. Мирзахмедов. /– 4-е издание. Т.: ИПТД „O‘qituvchi“, 2017. — 192 с.

ISBN 978-9943-22-101-7

УДК: 512(075.3)
ББК 22.14я72

SHAVKAT ARIFDJANOVICH ALIMOV,
ALIMDJAN RAXIMOVICH XALMUXAMEDOV,
MIRFAZIL ABDILXAKOVICH MIRZAXMEDOV

ALGEBRA

Umumiy o‘rta ta’lim maktablarining
7- sinfi uchun darslik

Qayta ishlangan va to‘ldirilgan

4- nashri

Перевод с узбекского **Г. Э. Юсуповой**

Издательско-полиграфический творческий дом «O‘qituvchi»
Ташкент — 2017

Редактор *Д. Рахимова*
Художественный редактор *Ш. Адилов*
Технический редактор *С. Набиева*
Компьютерная верстка *М. Салимовой*

Издательская лицензия AI № 291. 04.11.2016. Подписано в печать с оригинала-макета 03.07.2017. Формат 70×90[1]/16. Кегль 11 н/шп. Гарнитура Таймс. Печать офсетная. Бумага офсетная. Усл. п. л. 14,04. Учетно-издательские л. 9,5.
Тираж 4 985 экз. Заказ №

Издательско-полиграфический творческий дом «O‘qituvchi» Узбекского агентства по печати и информации. Ташкент, массив Юнусабад, ул. Янгишахар, дом 1.
Договор № 49-17.