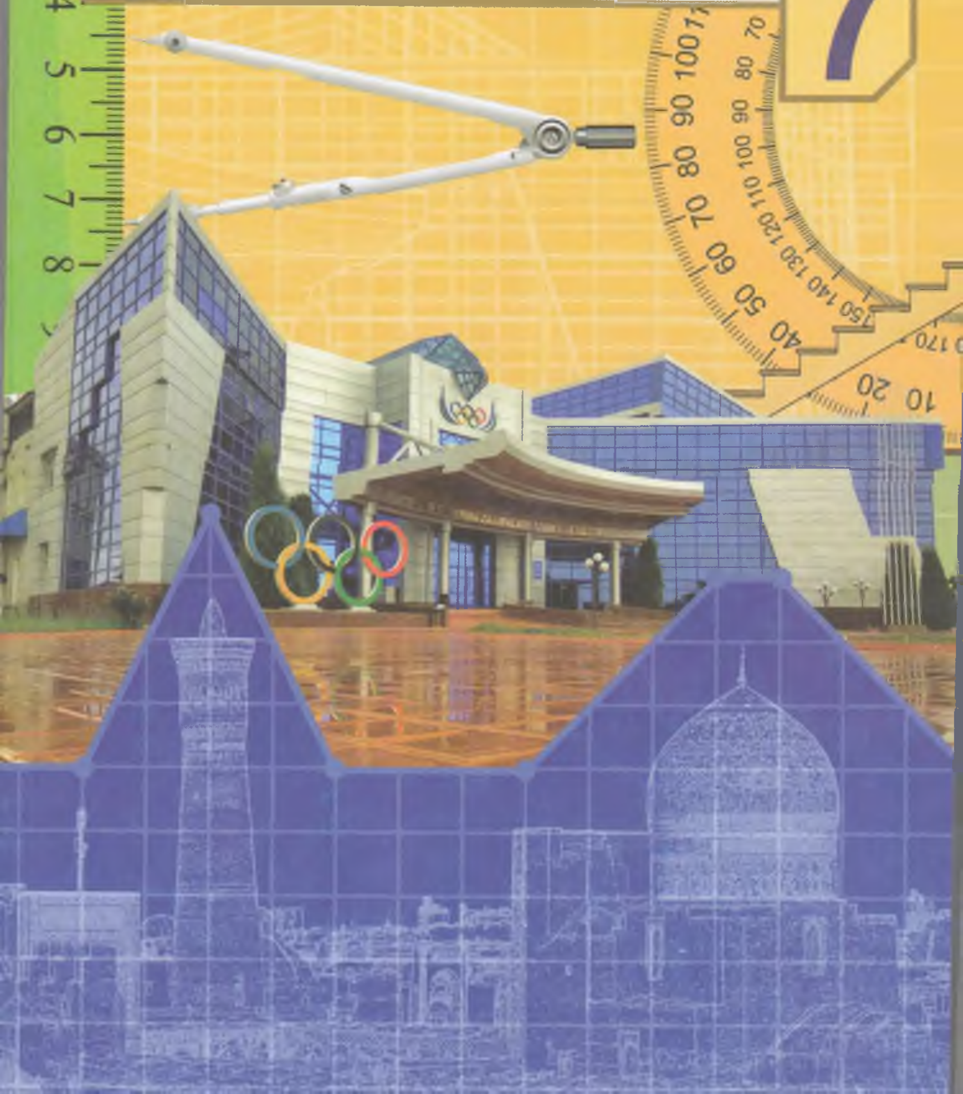
ГЕОМЕТРИЯ

7



ГЕОМЕТРИЯ 7

Учебник для 7 классов школ общего среднего образования

Третье исправленное и дополненное издание

Утвержден Министерством народного образования Республики Узбекистан

ТАШКЕНТ
“YANGIYO‘L POLIGRAF SERVIS”
2017

УДК: 514=161.1(075.3)
ББК: 22.151я72

Авторы: А. Азамов, Б. Хайдаров, Э. Сариков, А. Кучкаров, У. Сагдиев

Рецензенты:

А. Я. Норматов,	доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой геометрии и прикладной математики Узбекского Национального Университета;
С. Ф. Сайдалиева,	кандидат педагогических наук, доцент кафедры математики и методики;
Б. Q. Эшмаматов,	кандидат физико-математических наук, доцент, пенсионер;
М. М. Шаниязова,	учитель математики Ташкентской городской школы №300;
М. Санаева,	учитель математики высшей категории школы №23 Ташкентской области Зангиотинского района.

Условные обозначения:

- Определение впервые вводимого геометрического понятия
- Практическое упражнение
- Вопросы, задачи и задания
- Образцовая задача или практическая работа
- Аксиома
- Адрес рекомендуемых данных в сети Интернет
- Занимательная задача
- Теорема
- Активизирующее упражнение
- Геометрический анализ
- Геометрия в нашей жизни
- Странички истории

* Задачи повышенной сложности

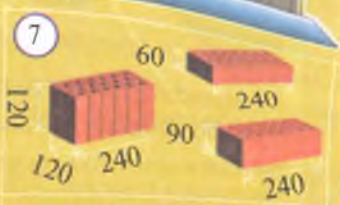
Издано за счёт Республиканского целевого книжного фонда

ISBN 978-9943-4935-2-0

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА I

НАЧАЛЬНЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ. ПЛАНИМЕТРИЯ



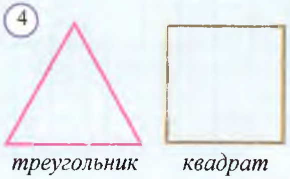
1 НАУКА ГЕОМЕТРИЯ И ПРЕДМЕТ. ЗАДАЧИ ГЕОМЕТРИИ КАК НАУКИ

1

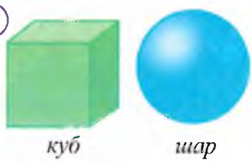
2

3

4



5



Первоначальные сведения по геометрии появились за 4-5 тысячелетий до наших дней в Древнем Египте. В этих краях ежегодные разливы Нила смывали посевы. Поэтому для того чтобы восстанавливать посевы и уточнять размеры налогов, необходимо было размечать поля и выполнять необходимые подсчеты *(рис. 1)*. Древнегреческие ученые переняли у египтян способы измерения и учета земель и назвали эти знания геометрией. ***“Геометрия”*** – слово, происходящее от греческих слов “гео” – земля, “метрео” – измерять.

В VII–VI вв. до н. э. в Хорезме, в низовьях Амударьи, как и в Египте, выполнялись работы по учету посевных площадей.

Сведения, относящиеся к геометрии, появились также в Древнем Вавилоне. В частности, историки считают, что теорема Пифагора была открыта в Вавилоне.

Древнегреческий ученый Евклид, собрал и систематизировал известные к тому времени геометрические понятия и их свойства в книге, известной под названием ***“Начала”***. На протяжении двух тысячелетий эта книга выполняла роль важнейшего учебника для школы и способствовала развитию точных наук. Изучение геометрии и сегодня во многом основано на идеях этой книги.

Наши великие соотечественники Мухаммад ал-Хорезми, Ахмад Фергани, Абу Райхан Беруни, Абу Али ибн Сина способствовали дальнейшему прогрессу этой науки, сохраняя и развивая достижения ученых античного мира. На Востоке изучению геометрии придавалось большое значение. Эту мысль подтверждает и тот факт, что слово muhandis (инженер) происходит от того же корня, что и *хандаса* (геометрия).

Изучаемые нами предметы имеют определенную форму. Возьмем, например, кирпич или картонную коробку. Они имеют форму фигуры, известной вам из курса 5 класса – прямоугольного параллелепипеда *(рис. 2)*. Он имеет 8 вершин – точек, *Геометрия – это наука о геометрических фигурах и их свойствах.*

12 ребер – отрезков, 6 граней – прямоугольников.

С понятиями точки, прямой, отрезка, угла, квадрата, окружности, куба и шара вы познакомились в младших классах *(рис. 3–5)*.

Фигуры, представленные на рисунках 3-5, – это геометрическая иллюстрация многих природных тел. Изучая тела с точки зрения геометрии, мы будем принимать во внимание только их фигуры.

Точку, отрезок, угол, треугольник и другие подобные им плоские фигуры вы будете чертить в своих тетрадях. Пространственные фигуры такие как куб, пирамида, шар начертить в тетради не удастся. Но получить представление об их внешнем виде можно и в тетради.

Планиметрия – начальный раздел геометрии, который изучает свойства геометрических фигур на плоскости. Пространственные фигуры изучает раздел геометрии, называемый стереометрия.

Планиметрия – это раздел геометрии, который изучает свойства геометрических фигур на плоскости.

6

Евклид
(III век до н. э.)

Древнегреческий ученый, внесший большой вклад в формирование геометрии как науки, известен своим сочинением "Начала".

Вопросы, задачи и задания

1. Где и как появились первоначальные сведения по геометрии?
2. В чем смысл слова геометрия и почему она была названа таким словом?
3. Каких вы знаете ученых, заложивших основы геометрии и внесших вклад в ее развитие?
4. Какую фигуру напоминает памятник Кок Минор изображенный на рисунке 6 и какие геометрические фигуры вы видите на его поверхности?
5. Что изучает наука геометрия?
6. Какая часть геометрии относится к планиметрии? К стереометрии?
7. Какие особенности имеет наука стереометрия?
8. Приведите примеры предметов, напоминающих геометрические фигуры, и нарисуйте их в тетрадях.
9. По каким свойствам фигуры, изображенные на рисунках 3-5, можно объединить в группы? В чем состоят эти свойства?
10. Свойства каких фигур, изображенных на рисунках 3-5, изучает планиметрия?

2 ПРОСТЕЙШИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФИГУРЫ: ТОЧКА, ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ

A, B_1, B_2 — точки
c — прямая линия
$A \in c$, $B_1 \notin c$, $B_2 \notin c$

Точка, прямая и плоскость – основные понятия геометрии. Так как они являются простейшими понятиями геометрии, то их не определяют. По этой же причине при введении новых понятий они являются опорными.

Если прикоснуться карандашом к бумаге, мелом к доске, оставив на ней след, или посмотреть на звездочку в небе *(рис.1)*, они покажутся нам такими маленькими, что их видимыми размерами можно будет пренебрсчь. ***Точка*** – это именно такой объект, размеры которого можно не учитывать. Евклид в своем геометрическом труде "Начала" определил точку как фигуру, не имеющую частей.

Рельсы, уложенные в степи, электрические провода, натянутые между столбами, луч лазера и подобные им объекты – это все примеры ***прямых линий***. Луч света также распространяется по прямой *(рис.3)*. Прямая линия бесконечна. Изображая ее на бумаге или классной доске, мы чертим только ее часть. Но прямая линия всегда может быть неограниченно продолжена в обе стороны.

Паркетный пол, столешница, стена, потолок, тетрадный лист, поверхность воды в озере *(рис.3)* дают представление о ***плоскости***.

Точки обозначаются заглавными буквами латинского алфавита A, B, C, D, ... , прямые – строчными буквами a, b, c, d, ... , и запись читается “точка A”, “прямая a” *(рис. 4)*.

Какую бы прямую ни взять на плоскости, существуют точки, лежащие на прямой и точки, не лежащие на ней.

Например, на рисунке 4 точка A лежит на прямой c, точки B_1 и B_2 не лежат на прямой c. Это коротко записывают в виде $A \in c$ и $B_1 \notin c$, $B_2 \notin c$ и читают “точка A принадлежит прямой c” и “точки B_1 и B_2 не принадлежат прямой c”. Это выражение можно сократить: “A принадлежит c” и “B_1 и B_2 не принадлежат c”.

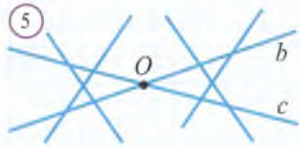
Пусть b и c различные прямые. Если точка O принадлежит и прямой b, и прямой c, то прямые b и c пересекаются в точке O (рис.5), и точка O называется ***точкой пересечения прямых*** b и c.

Изображенные на рисунке 6 точки A и B принадлежат прямой c. В этом случае обычно говорят «прямая c проходит через точки A и B».

Через любые две различные точки проходит одна и только одна прямая.

Из этого свойства следует, что если известны две различные точки прямой, то прямая будет определена однозначно. Поэтому прямую обычно обозначают с помощью лежащих на ней точек. На рисунке 6 изображена *прямая AB*.

Примечание: *В дальнейшем, говоря две прямые, две точки, ... , мы имеем в виду две различные прямые, точки, ...*



O точка пересечения прямых b и c

Каждая прямая разбивает плоскость на две части – две полуплоскости.

Прямая считается принадлежащей обеим полуплоскостям, на которые она разбивает плоскость. На рисунке 6 изображены две полуплоскости, на которые плоскость разбивается прямой c.

Вопросы, задачи и задания

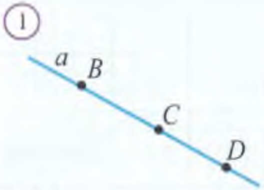
1. Расскажите об основных понятиях геометрии. Как они обозначаются?
2. Как вы представляете себе точку, прямую и плоскость?
3. Прочитайте и объясните следующие выражения: а) $A \in b$; б) $C \notin b$; $C \notin AB$.
4. Точки A и B лежат на прямой d, точка C не принадлежит прямой d. Что можно сказать о прямых AB и AC?
5. Сколько общих точек может быть у прямых AB и AK?
6. Начертите на плоскости прямую c и обозначьте на ней точку A. Начертите прямую AB, отличную от прямой c. Будет ли точка B лежать на прямой b?
7. Сколько прямых можно провести через а) одну; б) две; в) три различные точки? Ответ обоснуйте.

8*. Сколько прямых можно провести через а) три; б) четыре точки, проводя их через каждый две точки, если никакие три из них не лежат на одной прямой?

9*. Обозначены точки пересечения каждых двух из четырех прямых. Каково наибольшее число этих точек? А если рассмотреть пять прямых?

10. Расположите на плоскости пять точек так, чтобы число прямых, соединяющих каждую пару точек, было равно пяти.
11. Сколько прямых изображено на рисунке 5?
12. Запишите с помощью знаков принадлежности связи между фигурами на рисунке 6.

3 ОТРЕЗОК И ЛУЧ



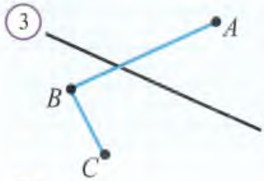
Если на прямой a взять три точки B, C, D (рис.1), то только одна из них – точка C лежит между двумя остальными, т. е. точками B и D. Точки B и C лежат по одну сторону от точки D, точки C и D лежат по одну сторону от точки B.

Из трех данных точек, лежащих на одной прямой, одна и только одна лежит между двумя другими.

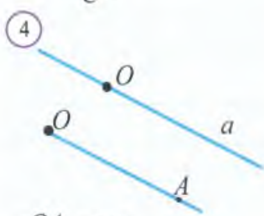
AB — отрезок
A, B — концы отрезка

***Отрезком** называется часть прямой, состоящая из двух ее точек и всех точек, лежащих между ними.*

На рисунке 2 изображен отрезок. Точки A и B – ***концы отрезка*** или его ***граничные точки***. Точки, лежащие между ними, называются ***внутренними точками*** отрезка. Отрезок можно обозначать, указывая его концы: “*отрезок AB* ", “*отрезок BA*”.



Пусть на плоскости проведена прямая. Она делит эту плоскость на две полуплоскости. Если точки A и B лежат в одной полуплоскости относительно прямой, то в этом случае отрезок AB полностью лежит в этой полуплоскости и не пересекает ее границу. Если же точки A и B лежат в разных полуплоскостях, то отрезок AB пересекает ее *(рис. 3)*.



OA — луч
O — начало луча

***Лучом** называется часть прямой, состоящая из всех точек, лежащих по одну сторону от некоторой точки этой прямой.*

Точка O некоторой прямой a, разбивает прямую на ***два взаимно дополняющих друг друга луча*** с общим ***началом*** O. Выбирая на прямой некоторую точку A, луч, на котором лежит эта точка, обозначают “луч OA” *(рис. 4)*. На первом месте указывают начало луча или начальную точку *(рис. 4)*.

Так же говорят: “***луч OA исходит из точки O***”.

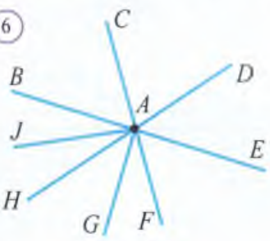
Луч можно рассматривать как геометрическую модель луча света. Отсюда и происходит термин “луч”.

Вопросы, задачи и задания

1. Укажите между какими точками лежит точка B на рисунке 5.a? Какие точки лежат по одну сторону от точки C?
2. Дайте определение отрезка и луча. Как они обозначаются?
3. На прямой даны точки C и D. Совпадают ли отрезки CD и DC? А лучи CD и DC?
4. В чем различие между отрезком, лучом и прямой линией?
5*. На сколько частей делят прямую а) одна; б) две; в) три; г) 10; д) n точек?
6. Сколько отрезков на рисунке 5.б?
7. Сколько лучей на рисунке 6?
8. Сколько лучей задают 2 точки, лежащие на одной прямой? А 3 точки?
9. На сколько частей разбивают плоскость две прямые, принадлежащие ей?
10. Дана прямая и не принадлежащие ей точки A, B, C. Отрезок AB пересекает данную прямую a, отрезок AC не пересекает ее. Пересекает ли эту прямую отрезок BC?
11. *Геометрическое представление.* Дана некоторая прямая и точки A, B, C, D, не лежащие на ней. Отрезки AB и CD пересекают данную прямую, отрезок BC не пересекает ее. Пересекает ли прямую отрезок AD.

5

6



1. Будет ли отрезок AD пересекать прямую или нет, если отрезки AB, BC и CD пересекают ее?
2. А в случае, когда отрезки AC и BC пересекают данную прямую, но не пересекают BD?
3. А если AB и CD пересекают данную прямую, но не пересекают BC?
4. А если AB и CD не пересекают данную прямую, но пересекают BC?
5. Что можно сказать об отрезке AD, если AB, BC и CD не пересекают данную прямую?
6. Что можно сказать об отрезке AD, если и AB, и BC, и CD не пересекают данную прямую? Запишите ваши ответы, а затем обоснуйте их на чертеже.

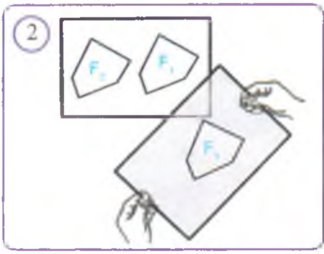
Какие вы видите схожие свойства между изображенными на рисунке лучами Солнца и понятием луча в геометрии? Какие различия имеются между ними?

4 СРАВНЕНИЕ ОТРЕЗКОВ

Активизирующее упражнение

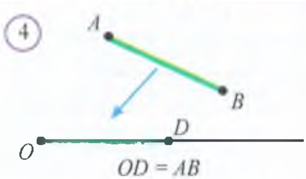
1. Какие из фигур на рисунке 1 можно наложить друг на друга?
2. Приведите примеры предметов из окружающей вас среды, имеющих одинаковую фигуру и одинаковые размеры.

Две фигуры называются ***равными****, если их можно совместить наложением.*



С понятием наложения одной фигуры на другую вы познакомились на активизирующих упражнениях. Можно следующим образом представить себе, как это сделать на практике. Для того чтобы совместить одну фигуру с другой, скопируем вначале на прозрачную бумагу эскиз одной из фигур. Затем станем передвигать бумагу так, чтобы эскиз первой фигуры в точности совпал с эскизом второй *(рис. 2)*. Если это можно будет сделать, то эти фигуры окажутся равными.

В повседневной жизни очень часто встречаются равные фигуры. Примерами могут быть листы бумаги с равными измерениями, книжные страницы. *(рис. 3)*.



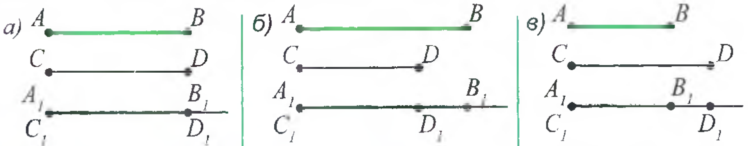
Откладывание отрезка на луче. Пусть даны луч с началом O и произвольный отрезок AB. Если при переносе отрезка AB он совместится с отрезком OD на луче, то по определению, $OD = AB$. В этом случае говорят, что «отрезок AB отложен на луче O от его начала» *(рис. 4)*.

Операцию откладывания отрезка на луче можно также производить с помощью прозрачной пленки или циркуля.

На произвольном луче, начиная от его начала, можно отложить единственный отрезок, равный данному.

Если отрезки не равны, то один из них будет длиннее или короче другого. Для того чтобы сравнить два отрезка, надо отложить каждый из них на одном и том же луче от его начала и, в зависимости от того будут ли отрезки равны или нет можно будет сделать нужное заключение (рис. 5). На рисунке 5а – *а* отрезки *AB* и *CD* равны, на рисунке 5б отрезок *AB* длиннее отрезка *CD*, а на рисунке 5в короче.

5



отрезок AB равен отрезку *CD* | отрезок *AB* длиннее отрезка *CD* | отрезок *AB* короче отрезка *CD*

Середина отрезка *– это точка, которая делит его на две равные части.*

На рисунке 6 отмечена точка *C* – середина отрезка *AB*. На чертеже равные отрезки отмечаются равным числом черточек.

6

$AC = CB$

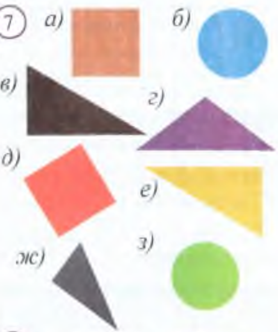
Вопросы, задачи и задания

1. Какие фигуры называются равными?
2. Какие из фигур на рисунке 7 равны?
3. Какие из букв равны как геометрические фигуры?

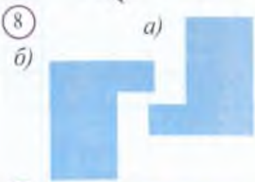
   a, b, g, d, i, y, n, o, p, u, q
4. Скопируйте, без искажения размеров, фигуру, изображенную на рисунке 8*а*, на бумагу и вырежьте. Затем, накладывая ее на геометрическую фигуру рисунка 8*б*, определите, будут ли они равны.
5. Какие отрезки равны?
6. Как сравниваются отрезки?
7. Что такое середина отрезка?
8. На прямой отмечены точки *A*, *B*, *C*, *D*. Сколько имеется отрезков с концами в этих точках? Выпишите их?
9. В тетради нарисуйте отрезок и отметьте на глаз его середину. Результат проверьте линейкой. Повторите упражнение.

10* У дехканина был земельный участок квадратной формы. Он выделил для себя четвертую часть этого участка, как показано на рисунке 9. Оставшуюся часть участка он поделил на четыре равных участка одинаковой формы для четырех своих сыновей. Как дехканин смог это сделать?

7



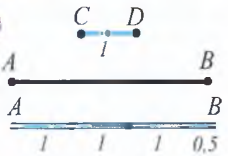
8



9

5 ДЛИНА ОТРЕЗКА И ЕЕ СВОЙСТВА

1



Сравнивать длины отрезков, откладывая их на луче, не слишком удобно. Узнать, какой из отрезков длиннее или короче (т. е. больше или меньше) можно, сравнивая их длины.

Выберем какой-нибудь отрезок за единичный и примем его длину за единицу. Длины оставшихся отрезков определим по отношению к единичному отрезку. ***Длина отрезка*** – это положительное число, которое показывает, сколько раз можно отложить на нем единичный отрезок или его части. Ясно, что если выбрать отрезок CD в качестве единичного (*рис. 1*), т. е. принять его длину за 1, то длина отрезка AB будет равна 3,5. Действительно, отрезок CD откладывается на отрезке AB три с половиной раза.

Каждый отрезок имеет определенную длину, являющуюся положительным числом.

Длину отрезка AB обозначают в геометрии следующим образом: $|AB|$. Таким образом AB – отрезок (геометрическая фигура), а $|AB|$ – положительное число. Но обычно и длину отрезка обозначают как AB. Пусть на прямой отмечены точки A, B и C. Если точка B лежит между точками A и C, то длина отрезка AC есть сумма длин отрезков AB и BC, т.е. имеет место равенство $AC = AB + BC$ (рис. 2). Мы примем без доказательства это утверждение, касающееся длин отрезков:

2

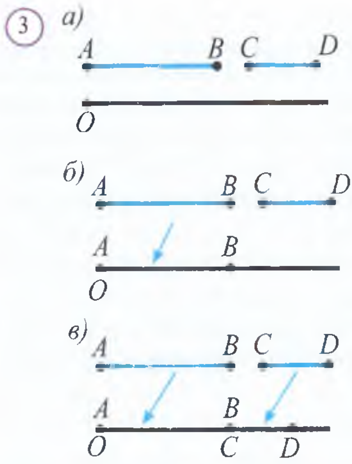
Если на прямой точка B лежит между точками A и C, то длина отрезка AC равна сумме длин отрезков AB и BC:

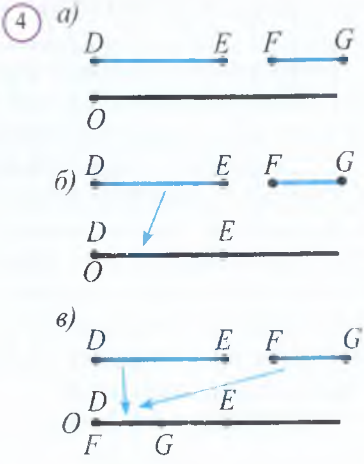
$$\boldsymbol{AC = AB + BC.}$$

Вышеприведенное утверждение позволяет определить операции сложения и вычитания отрезков. Пусть O — луч, а AB и CD — данные отрезки *(рис. 3а)*. Сначала отложим на луче от точки O отрезок AB *(рис. 3б)*. Затем отложим на луче от точки B отрезок CD *(рис. 3в)*.

Говорят, что полученный в результате отрезок AD равен ***сумме отрезков*** AB и CD. Для этих отрезков верно равенство $AD = AB + CD$.

Аналогично определяется и операция ***вычитания отрезков***. Пусть O – начало луча, а DE и FG – данные отрезки и пусть $DE > FG$ *(рис. 4а)*. Сначала на этом луче откладываем больший отрезок DE *(рис. 4б)*. Затем на этом же луче от точки O откладываем отрезок FG *(рис. 4в)*. Полученный отрезок GE называют разностью отрезков DE и FG. Для длин отрезков имеет место равенство $GE = DE - FG$





Длину отрезка AB называют также ***расстоянием*** между точками A и B.

Вопросы, задачи и задания

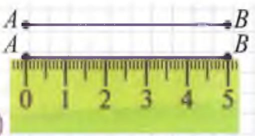
1. Что вы понимаете под длиной отрезка?
2. Какие отрезки называются равными?
3. Назовите свойства отрезков.
4. Что называют суммой и разностью отрезков?
5. Что такое длина отрезка?
6. На карте мира город Алжир расположен между Токио и Лос Анджелесом *(рис. 5)*. Японский ученик может сказать: «Токио расположен между Алжиром и Лос Анджелесом.» А ученик из США говорит: « Нет, Лос Анджелес расположен между Алжиром и Токио.» Как это можно объяснить?

7. Может ли точка E лежать внутри отрезка AB, если отрезки AB и DE лежат на одной прямой и AB=10 см, DE=20 см? Обоснуйте ответ.
8*. Дан отрезок AB. Постройте отрезки с длиной: а) $2AB$; б) AB:2; в) AB:4.
9*. Для точек A, B, C прямой: AB=5,6 см, AC=8,9 см и BC=3,3 см. Какая из точек A, B и C лежит между двумя другими?
10. На прямой даны точки A, B, C и D. Точка D лежит между точками B и C. Известно, что DC=4,2 *см*, BD=2,4 *см* и BC=3,3 *см*. Отрезок AB в два раза длиннее отрезка DC. Найдите длину отрезка AC.

6 ИЗМЕРЕНИЕ ОТРЕЗКОВ

С древнейших времен люди использовали для измерения длин различные единицы длины. Например, в Средней Азии были в ходу такие единицы, как локоть, пядь, маховая сажень, верста. В «Бобурноме» были упомянуты такие единицы как 1 элик = 2 см, 1 тутам = 4 элик, 1 кари = 6 тутам, 1 шаг = 1,5 кари, 1 миля = 4000 шагов, 1 шаръи = 2,8 км. Использование различных единиц измерения создавало много трудностей. Поэтому, начиная с конца XVIII века стали использовать французскую единицу длины – ***метр***. Позже она получила распространение во всем мире. Вы познакомились с метром на уроках физики в 6 классе. За эталон 1 метра была принята одна сорокамиллионная часть Парижского меридиана. Там же были приведены единицы длины больших или меньших метра. Для измерения длин больших (меньших) метра:

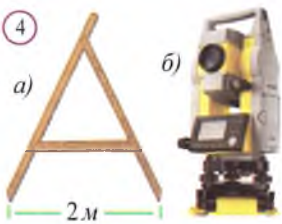
1 *км* = 1000 *м*; 1 *дм* = 0,1 *м*; 1 *см* = 0,01 *м*; 1 *мм* = 0,001 *м*.



1


2

3


4


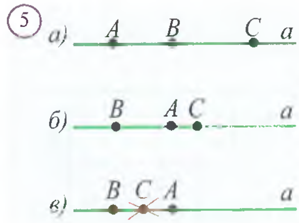
Для очень больших расстояний в астрономии используют астрономическую единицу = 149597870,7 *км*, световой год = 9460730472581 *км*, парсек = $3{,}08567758491 \cdot 10^{13}$ *км*, а в для очень маленьких длин в атомной физики микрон = 10^{-6} *м*, миллимикрон = 10^{-9} *м*, пикометр = 10^{-12}.

Длины отрезков измеряются с помощью различных инструментов. Самые простые из них имеют шкалу, т. е. снабжены набором делений с числами, служащими для измерения меньших длин. Например, если в качестве единицы измерения длин принят 1 см, то линейкой на рисунке 4, можно измерять отрезки длиной до 5 см. Пишут, что AB = 5 см. Если в качестве единицы измерения выбрать 1 миллиметр, то длина AB = 50 мм.

В некоторых случаях не пишут единицу измерения. Например, AB=10. Здесь предполагается что длина отрезка AB равна 10 единицам по условию.

Для измерения длин на поверхности земли используется рулетка *(рис. 3а)* или лазерные электронные инструменты *(рис. 3б)*. В легкой промышленности используют метр *(рис. 3в)*, инженеры и слесари – штангенциркуль *(рис. 3г)*. А в поле используют «сороку» – полевой циркуль *(рис. 4а)*. Сейчас для измерений на земле используют высокоточный современный инструмент – теодолит *(рис. 4б)*.

Задача. На прямой построены отрезки с концами A, B и C, для которых AB=8 см. BC=11 см. Найдите длину отрезка AC?



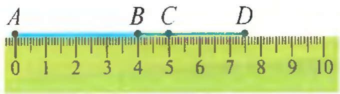
Решение: Рассмотрим следующие случаи:

1) Точки A, B, C расположены на прямой a как показано на рисунке 5*а*. В соответствии со свойствами длин отрезков $AC=AB+BC=11+$ $+8=19$ (*см*).
2) Пусть рассматриваемые отрезки имеют те же длины, что на рисунке 5*а*, но их концы расположены на прямой a как на рисунке 5*б*. Тогда по свойству длин $BA+AC=BC$, или $AC=BC-BA=11-8=3$ (*см*).
3) Точка C не может лежать между точками B и A так, как показано на рисунке 5*в*, потому что $AB<BC$.

Ответ: 19 см, 3 см.

Вопросы, задачи и задания

1. Какие единицы измерения, которые использовались в древности, вы знаете?
2. Какие единицы измерения существуют сейчас?
3. Какие инструменты измерения длины вы знаете?
4. По рисунку определите длины отрезков AB, AC, AD, BC, BD, CD.



5. а) AC=?   б) $AB=3$, $AC=2BC$, BC=?   в) $AB=24$, $BC=AC+6$, AC=?

6. Найдите BC, если $B\in AC$, $AB=7{,}2$ *см*, $AC=2$ *дм*.
7. Найдите CD, если $C\in AB$, $D\in AB$, $AB=5$, $AC=2{,}2$ и $BD=3{,}6$.
8. Отложите "на глаз" на прямой отрезки длиной а) 3 *см*; б) 7 *см*; в) 10 *см*. Проверьте правильность построений с помощью линейки.
9. На прямой для точек A, B, C имеем AB=600 *м*, BC=200 *м*. Найдите AC.
10*. На прямой для точек A, B, C и D имеем $AB=2$, $AC=CB$, $2AD=3BD$. Найдите CD.
11. Даны луч и отрезки с длинами AB=1,2 *см*, CD=2,8 *см*. Используя эти отрезки, постройте отрезки с длинами а) 4 *см*; б) 1,6 *см*; в) 0,4 *см*.
12. Начертите отрезок AB, длина которого равна 9 *см*. Обозначьте на луче AB такую точку C, чтобы а) $AC-BC$=1 *см*; б) $AC+BC$=11 *см*.

7 ОКРУЖНОСТЬ И КРУГ

1


2


3

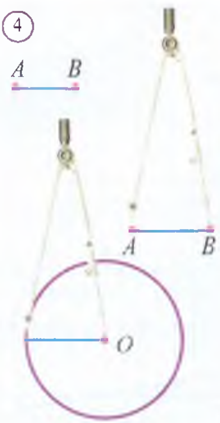

Геометрическим местом точек называют все точки фигуры, удовлетворяющие известному свойству.

Примером геометрического места точек являются окружность и круг.

Множество точек плоскости, расположенных на равном расстоянии от определенной точки O, называют ***окружностью***. Точку O называют ***центром*** этой окружности *(рис. 1)*. Расстояние от любой точки окружности до ее центра назквают ***радиусом*** окружности. Отрезок, соединяющий любые две точки окружности, называют ***хордой***. А хорду, проходящую через центр окружности, называют ***диаметром***. Диаметр – это самая большая хорда *(рис. 2)*.

Кругом называют часть плоскости, ограниченной окружностью. Центр, радиус и диаметр окружности являются соответствующими элементами ограниченного этой окружностью круга. *(рис. 3)*.

Для построения окружности используют циркуль. На рисунке 4 показано как с помощью циркуля начертить окружность с центром в точке O радиуса AB. Если начертив окружность, затем ножницами вырезать ее, то мы получим два круга – один круг из бумаги, а другой дырка вместо него.

4


Так как диаметр окружности (круга) проходит через центр, то он состоит из двух радиусов *(рис. 2)*. Следовательно, длина диаметра в два раза больше длины радиуса.

Практическое упражнение

Построение без циркуля окружности в тетради в клетку.

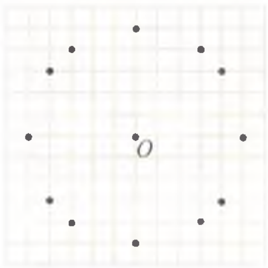
1. В тетради в клетку отметьте точки так, как показано на рисунке 5. При этом обратите внимание на расположение точек.
2. Полученные 12 точек последовательно соедините дуговой линией.

В результате вы получите приближенный чертеж окружности с центром O. Запомните этот способ (расположение точек). Он поможет вам построить окружность без помощи циркуля.

Как вы думаете, почему ударные музыкальные инструменты, представленные на рисунке, имеют форму круга?

Вопросы, задачи и задания

5



1. Сформулируйте определения окружности и круга и разъясните на чертеже.
2. Что такое центр, радиус, хорда и диаметр окружности?
3. Которая из хорд окружности является наибольшей?
4. Какой способ построения окружности без помощи циркуля вы знаете?
5. Знаете ли вы почему колеса телеги, велосипеда, автомобиля имеют форму окружности?
6. Почему чаще всего колодцы имеют форму окружности?
7. Дан отрезок AB. Что нужно сделать вначале, чтобы построить окружность, диаметр которого равен этому отрезку?
8. Выпишите 10 предметов из повседневной жизни, которые имеют форму окружности.
9. Найдите радиус окружности, диаметр которой равен: а) 18 *мм*; б) 45 *см*; в) 2 *м* 11 *см*.
10. Найдите радиус круга, диаметр которого равен: а) 10 *см*; б) 7 *см*; в) 1 *м* 14 *см*.
11. Начертите окружность, центр которой расположен на данной прямой с радиусом: а) 5 *см*; б) 7 *см*; в) 4,6 *см*.
12. Которое из следующих выражений определяет точку A, принадлежащую окружности или кругу с центром в точке O и радиусом R:

$$OA = R,\ OA \leq R,\ AO > R.$$

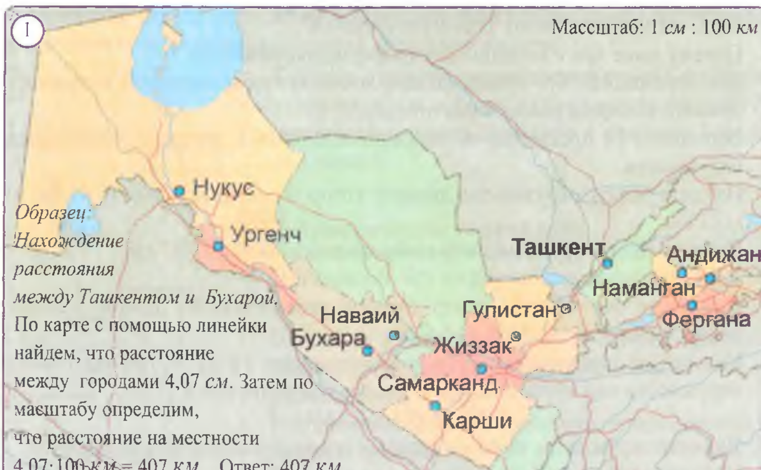
13. Диаметр окружности на 65 *см* длиннее его радиуса. Найдите ее диаметр.
14. Найдите наибольшую хорду круга с радиусом 8 *м*.

8 ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ

Активизирующие практические упражнения

> *Измерьте и запомните длину своих пяди и шага. Это будет полезно вам в повседневной жизни.*

1. Измерьте линейкой длину, ширину и толщину вашего учебника по геометрии.
2. Как можно измерить толщину листа вашего учебника? Сможете ли вы измерить линейкой диагональ кирпича?
3. Измерьте на глаз рост учеников вашего класса. Определите, кто из них самый высокий.
4. Измерьте линейкой, сколько в вашей пяди сантиметров. Затем измерьте пядями размеры нескольких предметов (длину, ширину и высоту парты, высоту и ширину окна, длину и ширину доски) и выразите результаты в сантиметрах.
5. Измерьте длину вашего шага. Измерьте в шагах длину и ширину школьного здания, длину и ширину спортплощадки и выразите их в метрах.
6. У вас в руках линейка длиной 30 *см*. Вам нужно измерить длину и ширину вашего класса. Как вы это сделаете? А если вместо линейки у вас будет спичечный коробок со стороной 5 *см*?
7. В соответствии с масштабом карты Узбекистана, найдите расстояния по прямой между различными городами *(рис. 1)*. Земля не плоская, так как она имеет изгиб, поэтому то расстояния будут приблизительными. Да и города не являются точками, они растянуты на несколько километров. Поэтому можно сделать вывод, что расстояние между Ташкентом и Бухарой около 407 *км*.



Образец:
Нахождение расстояния между Ташкентом и Бухарой.
По карте с помощью линейки найдем, что расстояние между городами 4,07 *см*. Затем по масштабу определим, что расстояние на местности $4{,}07 \cdot 100$ *км* = 407 *км*   Ответ: 407 *км*.

Во многих странах, наряду с международными единицами длины, используются также прочие единицы длины:

1 *дюйм* = 2,54 *см*. 1 *миля* = 1,609 *км*.

(на английском дюйм – фаланга пальца; миля – получено из слова тысяча).

8. Диагонали экрана телевизора (рис. 2) измеряются в дюймах. Выразите в сантиметрах диагональ 15, 17 и 19-дюймового телевизора.
9. Воспользовавшись сведениями, данными на рисунке 3, найдите расстояния от Земли до Солнца и до планет и выразите их в километрах.
10. Выразите расстояние между Бухарой и Самаркандом в верстах, если 1 *верста* = 900 *м*.

К титульному листу главы I страницы 5

1. Назовите геометрические фигуры, которые видны на здании и в окрестностях колледжа олимпийского резерва в городе Фергана? Какие из них равны между собой? (*рис. 3*)
2. Какой формы мельница на рисунке 4? Укажите ее элементы.
3. Какой формы кирпичи на рисунке 7? Объясните, исходя из их размеров, какие из них можно назвать одинарными, полуторными или двойными.

Занимательная задача

Измерение расстояний эхолокацией. Для корабля, плывущего в море, очень важно знать глубину моря. Для этого посылается звуковой сигнал ко дну и на корабле подсчитывается время, за которое сигнал возвращается, отразившись от дна. Половина этого времени умножается на скорость движения звука в воде – 1490 м/с, что дает глубину моря.

Какова глубина моря, если это время равно а) 3; б) 5; в) 5,6 секундам ?

9 ПОВТОРЕНИЕ МАТЕРИАЛА ГЛАВЫ I

1. Заполните пропуски в предложениях в соответствии со смыслом:

1. На плоскости через две точки можно провести .... и только одну прямую.
2. Если две различные прямые пересекаются, то только в .... точке.
3. Часть прямой, состоящая из точек, лежащих по одну сторону от некоторой ее точки, называется ....
4. Прямая разбивает плоскость ....
5. Серединой отрезка называется .... на равные отрезки.
6. У равных отрезков .... также равны.

2. Если в следующих фразах имеется ошибка, найдите и исправьте ее:

1. Две произвольные прямые на плоскости имеют только одну общую точку.
2. Через произвольную точку можно провести только две прямые.
3. Две прямые, лежащие на плоскости, делят ее на две полуплоскости.
4. Точка, делящая отрезок надвое, называется серединой отрезка.
5. Для произвольных точек A, B, C имеет место равенство $AB+BC=AC$.

3. Запишите в тетрадь соответствующие геометрические понятия, удовлетворяющие свойствам:

Имеет определенную длину	Истина, принимаемая без доказательства
Делит отрезок пополам	Не имеет измерений

4. Сопоставьте геометрическому понятию, данному в первом столбце, соответствующее свойство или толкование, взятое из второго столбца:

Понятие	*Толкование или свойство*
1. Точка	А. Толкование слова "Геометрия"
2. Прямая	Б. Точка на прямой и точки, лежащие по одну сторону от нее
3. Отрезок	В. Геометрическая фигура не имеющая измерений
4. Измерение земли	Г. Часть прямой лежащий между двумя точками
5. Луч	Д. Изучает свойства фигур на плоскости
6. Равные фигуры	Е. Одна из частей, на которые прямая разбивает плоскость
7. Полуплоскость	Ж. Не имеет частей
8. Планиметрия	З. Можно совместить наложением

К титульному листу главы I на странице 5

1. Какой формы тротуарная плитка на рисунке 6? Какими из них можно покрыть тратуар, не используя дополнительно плитку другой формы?
2. Какой формы дорожные знаки на рисунке 5? Как вы думаете, в чем причина различий цветов и форм этих знаков?

5. Тесты (из данных ответов выберите один правильный):

1. Укажите основное геометрическое понятие, принятое без определения:

   а) плоскость; б) точка; в) отрезок; г) луч; д) прямая.

   А) а; б; в; Б) б; в; д; В) а; б; в; д; Г) а; б; г.
2. В какой стране геометрия формировалась как наука?

   А) Древний Египет; Б) Вавилон; В) Греция; Г) Китай.
3. Даны 4 точки, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Через каждые две из этих точек проведены прямые. Найдите их число.

   А) 1; Б) 4; В) 5; Г) 6.
4. Каково наибольшее число отрезков, на которые делится отрезок AB двумя пересекающими его прямыми?

   А) 3; Б) 4; В) 5; Г) 6.
5. Каково наибольшее число частей, на которые три прямые разбивают плоскость?

   А) 4; Б) 5; В) 6; Г) 7.

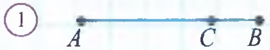
6. Задачи

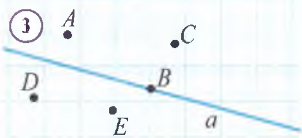
1. Лежат ли точки A, B и C на одной прямой, если $AB = 1{,}8$ *м*, АС = 1,3 *м* и $BC = 3$ *м*?
2. Точки A, B и C лежат на одной прямой. Найдите длину отрезка BC, если $AB = 2{,}7$ *м*, $AC = 3{,}2$ *м*. Сколько решений имеет задача.
3. На отрезке AB длиной 15 *м* обозначена точка C. Найдите длины отрезков AC и BC, если:

   а) отрезок AC больше отрезка BC на 3 м;

   б) точка C – середина отрезка AB,

   в) длины отрезков AC и BC относятся как 2 : 3.
4. Точки A, B, C, D лежат на одной прямой. Покажите, что $AB = BC = CD$, если точка B – середина отрезка AC, точка C – середина отрезка BD.
5. Сколько прямых можно провести через а) 6; б) 7; в) 10 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой?
6. Когда лучи OA и OB совместятся при наложении?
7. На луче AB выбрана точка C, на луче BA – точка D так что $AC = 0{,}7$ и $BD = 2{,}1$. Найдите CD, если $AB = 1{,}5$.
8. Точки A, B и C расположены на плоскости так, что а) $AC+CB=AB$; б) $AB+AC=BC$. Какая точка лежит между двумя другими?





Контрольная работа состоит из двух частей:

I. Теоретическая часть. Предлагается перечислить все геометрические фигуры, изученные ранее, описать их и записать их свойства.

II. Практическая часть. Требуется решить четыре из следующих задач:

1. На одной прямой лежат три точки A, B и C. AB=9, AC=12. Какова длина отрезка BC?
2. AB=48, AC=3BC, BC=?
3. Радиус окружности короче диаметра на 20 *см*. Найдите диаметр окружности.
4*. Диаметр круга 36 *см*. Будет ли принадлежать этому кругу точка, находящаяся на расстоянии 19 *см* от его центра?
5. Какие из фигур на рисунке 2 равны между собой?
6. Назовите как можно больше связанных между собой точек, отрезков, плоскостей и полуплоскостей на рисунке 3. Запишите их при помощи соответствующих знаков.
7. Сколько прямых изображено на рисунке 4? Сколько точек пересечения имеют каждые две из них?
8. Какие из изображенных ниже цифр равны между собой как геометрические фигуры?

9. Начертите в тетради отрезок MN, равный 12 *см*. На середине этого отрезка отметьте точку K. Затем отметьте точки E и F, являющиеся серединами отрезков MK и KN и середину отрезка EF. Обоснуйте почему точка K является серединой отрезка EF.

10. Как при помощи деревянной рейки и линейки можно измерить высоту крыши, окон и дверей дома? *(рис. 5)*
11. Напишите названия геометрических фигур, изображенных на рисунке 5. Найдите равные фигуры.

Дополнительный материал для развития практической компетенции

1. *Задача 1.* Прямые a и b пересекаются в точке C. Прямая a проходит через точку D. Будет ли прямая b также проходить через точку D?

Решение. Прямая b не может проходить через точку D. В противном случае обе прямые a и b будут проходить через точки C и D. А это по свойству означает, что через две точки проходит только одна прямая. Следовательно, прямая b не может проходить через точку B.

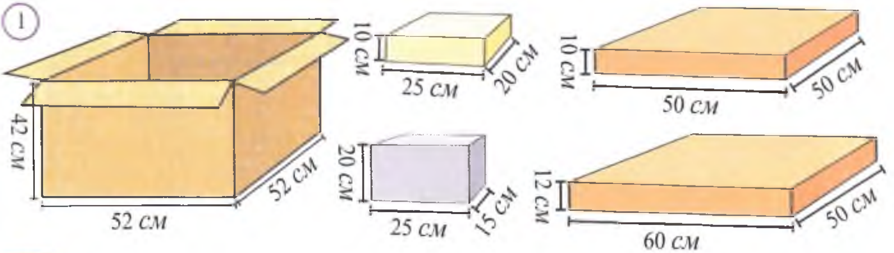
Решив эту задачу, мы узнали еще одно важное свойство прямых.

Свойство. ***Две прямые пересекаются не более чем в одной точке.***

2. *Задача 2.* Точка C принадлежит прямой AB. Могут ли быть различными прямые AB и AC?

Решение. Каждая из прямых AB и AC проходит и через точку A, и через точку C. Известно, что через две различные точки проходит единственная прямая. Поэтому эти прямые совпадают, т. е. не будут различными.

3. Сколько предметов каждого вида можно разместить в коробке *(рис. 1)*?



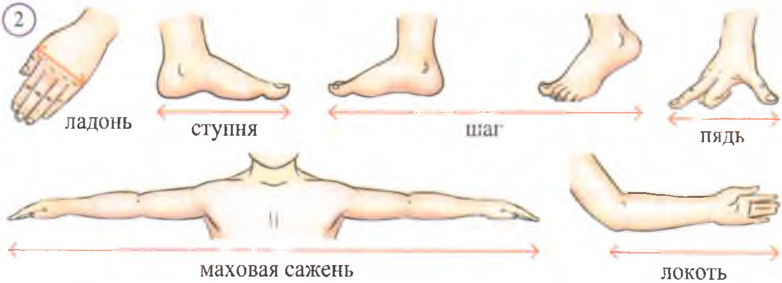
Странички истории

Ферганский ученый, обуздавший Нил

Согласно историческим свидетельствам, наш соотечественник Ахмад ал-Фергани (рис. 13) установил в 861 г. на реке Нил, неподалеку от Каира, устройство под названием "Нилометр", предназначенное для измерения уровня воды в Ниле. По научно-техническим и архитектурным качествам это сооружение, которое считалось совершенным и воплощало в себе исключительно смелые геометрические решения, было, на протяжении долгого времени жизненно важным для крестьян, и сохранилось до наших дней. В своем "Трактате о конструировании астролябий" Фергани дал изящное доказательство важной для астрономии теоремы Птолемея. Имя Фергани носит кратер на Луне, а в Каире в его честь установлен памятник. На титульном листе главы I на странице 5 изображены памятник нашего великого предка, установленный в городе Фергана, а также устройство для измерения уровня воды в Ниле.

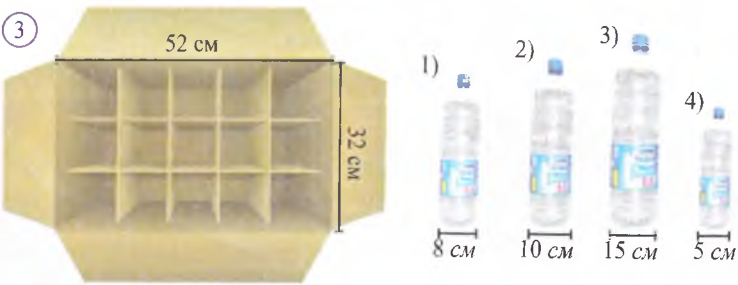
4. Вспомните общепринятые единицы длины, которыми пользуются при помощи руки и ноги *(рис. 2)*.

2



5. Сколько емкостей каждого вида можно разместить в коробке? Какие разместить нельзя (рис. 3)? Почему?

3



Практическое упражнение и практика

1. Фаез для лаборатории должен нарезать трубочки по 30 см. Как он это сделает, чтобы облегчить и ускорить работу? Какие способы для выполнения этой работы использовали бы вы? *(рис. 4)*

2. Саид собирается измерить рост своей сестренки. Что вы посоветуете ему, чтобы измерение было точным и удобным? *(рис. 5)*

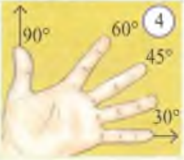
4

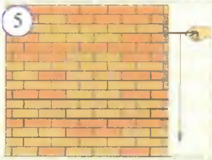
5

ГЛАВА II

УГОЛ

* *угол*





11 УГОЛ. СРАВНЕНИЕ УГЛОВ

***Углом** называется фигура, состоящая из точки и двух лучей, исходящих из нее.*

Лучи, составляющие угол, называются сторонами угла, а их общее начало – вершиной угла. На рисунке 1 изображен угол. Точка O – вершина угла, лучи OA и OB – его стороны. Этот угол обозначают так “$\angle AOB$” или “$\angle BOA$” и читается “угол AOB” или “угол BOA”. В такой записи вершина угла всегда помещается в середине. Иногда этот угол обозначается в виде “$\angle O$” , что читается “угол O”. На чертеже, для изображения отдельно взятого угла, его стороны соединяют дужкой как на рисунке 1.

1

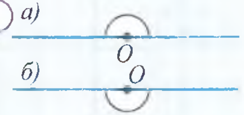
$\angle AOB$ – AOB *угол*

O – *вершина угла*

OA, OB лучи – *стороны угла*

***Развернутый угол** – это угол, стороны которого лежат на одной прямой.*

2



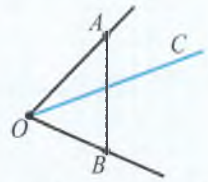
$\angle O$ – Развернутый угол

На рисунке 2 изображены развернутые углы.

Пусть дан угол O, отличный от развернутого. Рассмотрим отрезок AB, концы которого лежат на сторонах угла *(рис. 3)*.

Если луч OC пересекает отрезок AB *(рис.3)*, то говорят, что этот луч ***проходит между сторонами угла***. Угол разбивается лучом, проходящим между его сторонами, на два угла.

3

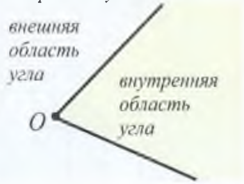


OC – луч, проходящий между сторонами угла.

Если угол O – развернутый, то говорят, что всякий луч, исходящий из его вершины и отличный от его сторон, проходит между его сторонами.

Ясно, что угол O, изображенный на рисунке 4, разбивает плоскость на две части.

4



Часть плоскости, в которой лежит луч, проходящий между сторонами угла, называется ***внутренней областью*** угла, вторая часть – его ***внешней областью***.

Пусть даны луч с началом O и угол A, не являющийся развернутым *(рис.5а)*. Известно, что прямая разбивает плоскость на две полуплоскости. Тогда ясно, что угол, равный углу A, одна сторона которого совпадает с лучом O, а вторая лежит в выбранной полуплоскости, опрсделен однозначно (рис.5б).

От произвольного луча в заданную полуплоскость можно отложить единственный угол, равный данному неразвернутому углу.

Теперь узнаем, как сравнивать углы между собой. В первую очередь отметим, что развернутый угол всегда больше неразвернутого. Теперь рассмотрим два неразвернутых угла $\angle A_1B_1C_1$ и $\angle A_2B_2C_2$.

Для этого возьмем луч OD (*рис. 7*). Рассмотрим одну из полуплоскостей, на которую плоскость делится прямой, лежащей на этом луче. Отложим сравниваемые углы на луче OD в эту полуплоскость.

Пусть при этом стороны B_1C_1 и B_2C_2 лежат на луче OD. Тогда для сторон B_1A_1 и B_2A_2 возможны три случая:

Первый случай: стороны B_1A_1 и B_2A_2 лежат друг на друге. В этом случае, углы

$\angle A_1B_1C_1$ и $\angle A_2B_2C_2$ называются равными: $\angle A_1B_1C_1 = \angle A_2B_2C_2$.

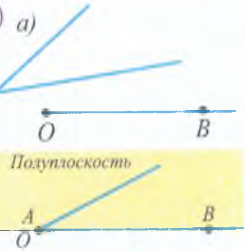
Второй случай: Сторона B_1A_1 лежит внутри угла A_2OD. В этом случае угол $\angle A_1B_1C_1$ меньше угла $\angle A_2B_2C_2$: $\angle A_1B_1C_1 < \angle A_2B_2C_2$.

Третий случай. Сторона B_2A_2 лежит внутри угла A_1OD. В этом случае угол $\angle A_1B_1C_1$ меньше угла $\angle A_2B_2C_2$: $\angle A_1B_1C_1 > \angle A_2B_2C_2$.

Вопросы, задачи и задания

1. Дайте определение угла.
2. Из каких элементов состоит угол?
3. Как обозначают и читают угол?
4. Как обозначают угол на чертеже?
5. Что такое развернутый угол?
6. Как разделить угол на две части?
7. На какие части разбивает угол плоскость?
8. Определите и назовите углы, изображенные на рисунке 8.
9. Что вы понимаете под "откладыванием угла от луча" в заданную полуплоскость?
10. Когда углы равны между собой?
11. Когда один из углов будет больше или меньше другого?

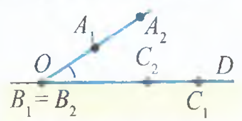
5



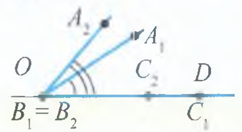
6

7

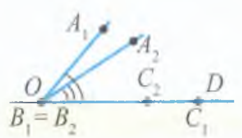
1. $\angle A_1B_1C_1 = \angle A_2B_2C_2$



2. $\angle A_1B_1C_1 < \angle A_2B_2C_2$



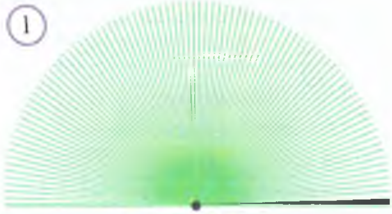
3. $\angle A_1B_1C_1 > \angle A_2B_2C_2$



8

12 ИЗМЕРЕНИЕ УГЛОВ. ТРАНСПОРТИР

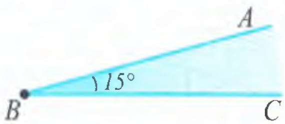
1



$\angle = 1°$

Пусть развернутый угол разбит лучами, проходящими между его сторонами, на 180 равных углов *(рис.1)*. Один из этих углов принимают за единицу измерения – ***единичный угол***. Его угловую величину называют ***градусом*** и обозначают 1°. Градусную меру любого угла можно определить на основе этого выбора единицы измерения углов. ***Градусная мера угла*** показывает, сколько единичных углов и их частей укладывается во внутренней области угла.

2

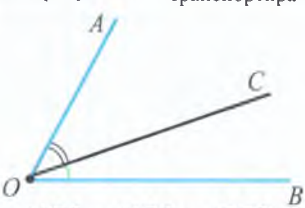


На рисунке 2 угол ABC равен 15°. Это значит, что в его внутренней области укладываются 15 единичных углов. Обычно на чертеже градусную меру угла пишут во внутренней его части как на рисунке 2.

3

Каждый угол имеет определенную градусную меру, которая выражается положительным числом. 180° – градусная мера развернутого угла.

4



$\angle AOB = \angle AOC + \angle COB$

Градусная мера угла определяется с помощью ***транспортира***. Вы познакомились с транспортиром в младших классах. Его шкала, размещенная на дугообразной части, разделена черточками на 180 равных частей, каждая из которых соответствует одному градусу. На рисунке 3 показан процесс определения градусной меры угла с помощью транспортира. Вы видите, что угловая величина угла AOB равна 60 градусам, что записывается в виде $\angle AOB=60°$. Легко понять, что углы, имеющие одинаковую градусную меру, равны, и обратно, градусная мера равных углов одна и та же. Больший угол имеет большую градусную меру.

При измерении углов используются и доли градуса. А именно, 1/60 часть 1° называется ***«минута»***, 1/3600 часть – ***«секунда»***, которые помечаются значками «′» и «″» соответственно. Например, угол, имеющий величину 45 градусов 38 минут 59 секунд, записывается как $45°38'59''$. Ясно, что $1°=60'$, $1'=60''$.

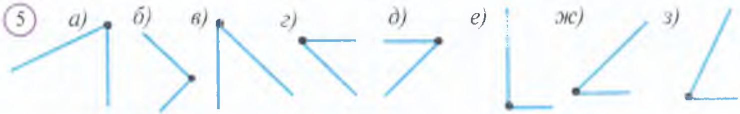
Пусть дан угол AOB и луч OC, проходящий между его сторонами, разбивает его на углы AOC и COB *(рис. 4)*. В таком случае если градусная мера угла AOC равна $n°$, а угла COB $m°$, то градусная мера угла AOB будет равна $n°+m°$.

Это свойство можно сформулировать так:

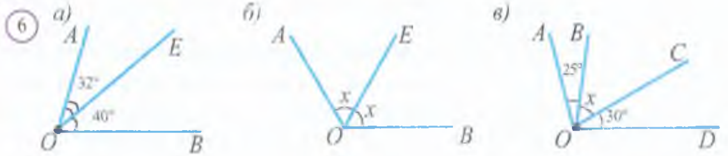
Градусная мера угла равна сумме градусных мер углов, на которые он разбивается любым лучом, проходящим между его сторонами.

Вопросы, задачи и задания

1. Что называют градусной мерой угла?
2. Чему равна градусная мера развернутого угла?
3. Какой угол вы имеете в виду, говоря, что угол равен 1°?
4. Будут ли равны углы, имеющие равные градусные меры?
5. На рисунке 5 с помощью транспортира определите равные углы.

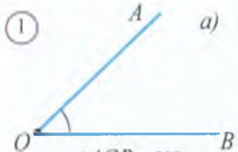


6. Постройте с помощью транспортира углы 10°, 30°, 70°, 100°, 160°.
7. а) $\angle AOB = ?$ (*рис. 6а*); б) $\angle AOB = 120°$, $x = ?$ (*рис. 6б*); в) $\angle AOD = 105°$, $x = ?$ (*рис. 6в*).



8. От луча OD отложите $\angle ABC = 150°$.
9. Постройте углы 60° и 120°, обладающие общей стороной. Какой получился угол?
10* Пройдет ли луч OE между сторонами $\angle AOB$, если а) $\angle AOE=20°$, $\angle EOB=40°$, $\angle AOB=60°$; б) $\angle AOE=80°$, $\angle EOB=120°$; в) $\angle AOE > \angle AOB$?
11. В тетради начертите луч и отложите от него «на глаз», пользуясь только линейкой, углы 15°, 30°, 45°, 60°, 75°, 90°, 120° и 150°. Затем измерьте построенные углы транспортиром и проверьте, насколько вы были точны. Повторите упражнение.
12. Чему равны градусные меры углов между стрелками часов а) в 3.00; б) в 6.00.

13 ВИДЫ УГЛОВ: ПРЯМОЙ, ОСТРЫЙ И ТУПОЙ УГЛЫ. БИССЕКТРИСА

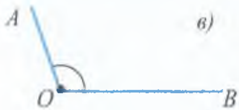


$\angle AOB < 90°$

Острый угол

$\angle AOB = 90°$

Прямой угол



$90° < \angle AOB < 180°$

Тупой угол

Мы говорили на предыдущих занятиях, что градусная мера развернутого угла равна 180°. Короче говоря: *«Развернутый угол равен 180°».* Углы, меньшие развернутого, различаются по величине. Если градусная мера угла:

меньше 90° *(рис. 1а)*, то это ***острый угол***;

равна 90° *(рис.1б)*, то это ***прямой угол***;

заключена между 90° и 180° *(рис.1в)*, то угол называется ***тупым углом***.

Таким образом острый угол меньше прямого, а тупой угол больше него.

На чертеже прямой угол выделяют так, как показано на рисунке 1б.

> ***Биссектрисой угла*** *называется луч, делящий угол на два равных угла.*

На рисунке 3 изображена биссектриса OC угла AOB.

Задача. Пусть $\angle AOD=135°$ и $\angle AOB = =\angle BOC =\angle COD$ (*рис. 2а*), Найдите:

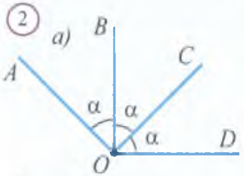
а) сколько на чертеже острых, тупых и прямых углов?

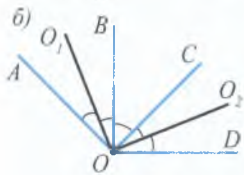
б) угол между биссектрисами углов AOB и COD.

Решение: а) Пусть $\angle AOB=\angle BOC=\angle COD=\alpha$. Тогда, по основному свойству измерения углов, $\angle AOD=\alpha+\alpha+\alpha=135°$. Откуда $\alpha=45°$. Значит, $\angle AOC=2\alpha=90°$, $\angle BOD=2\alpha=90°$. Таким образом, на чертеже три острых угла, два прямых угла и один тупой угол.

б) Пусть OO_1 и OO_2 – соответствующие биссектрисы (*рис. 2б*). $\angle AOB=\angle COD=45°$ то, по определению биссектрисы угла,

$$\angle O_1OB = \angle O_2OC = \frac{\alpha}{2} = 22{,}5°.$$





Находим искомый угол:

$$\angle O_1OO_2 = \angle O_1OB + \angle BOC + \angle COO_2 = \frac{\alpha}{2} + \alpha + \frac{\alpha}{2} = 2\alpha = 90°,$$

O_1OO_2 – прямой угол.

Напоминание. Обычно угол и его величину обозначают малыми греческими буквами α (альфа), β (бета), γ (гамма).

Вопросы, задачи и задания

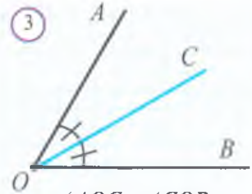
1. Какой угол называется прямым? Приведите примеры прямых углов из повседневной жизни.
2. В чем различие между острыми и тупыми углами?
3. Начертите три угла и обозначьте их $\angle AOB$, $\angle MNL$, $\angle PQR$ соответственно. Измерьте их транспортиром и определите их виды.
4. Начертите луч OA. Постройте с помощью транспортира углы $\angle AOB$, $\angle AOC$ и $\angle AOD$ с угловыми величинами 25°, 72° и 146° соответственно.
5. Какой угол образует биссектриса прямого угла с его сторонами?
6. Сколько на рисунке 4: а) острых; б) тупых; в) прямых; г) развернутых углов?
7. Сколько на рисунке 5 имеется острых и сколько тупых углов?
8. На листе бумаги начертите угол. Сгибая лист бумаги, постройте угол: а) в 2 раза больший; б) в 2 раза меньший; в) дополняющий данный до прямого.
9. Когда часовая и минутная стрелки часов образуют прямой угол.

10*. На сколько градусов повернется часовая стрелка за: а) 1 час; б) 6 часов; в) 2 минуты?

11. На сколько градусов повернется минутная стрелка за: а) 1 минуту; б) 5 минут; в) 0,5 часа?

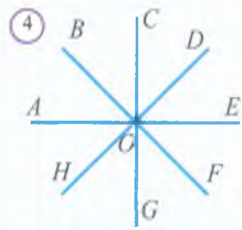
12*. Определите угол между часовой и минутной стрелками на рисунке 6.

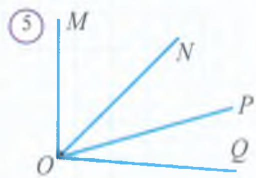
13. Дайте определение биссектрисы угла.
14. Угол $\angle AOB$ разделен лучами OC, OD и OE на четыре равные части. Биссектрисами каких углов будут эти лучи?
15. Начертите прямоугольник $ABCD$. Соедините точки A и C. С помощью транспортира измерьте следующие углы: $\angle ACD$, $\angle ACB$, $\angle CAD$, $\angle CAB$.
16. Биссектриса какого угла делит его на два прямых угла?

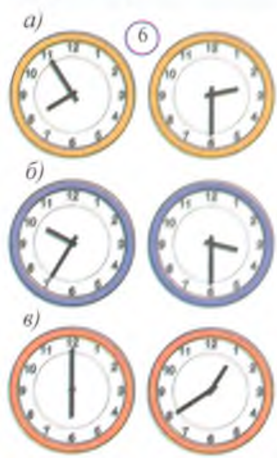


$\angle AOC = \angle COB$

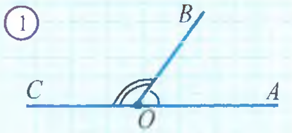
OC – биссектриса угла AOB



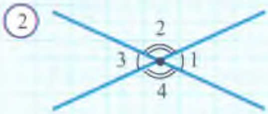




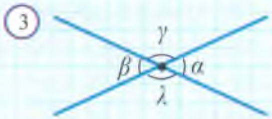
14 СМЕЖНЫЕ И ВЕРТИКАЛЬНЫЕ УГЛЫ И ИХ СВОЙСТВА

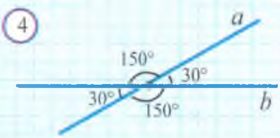


∠*AOB* и ∠*BOC* смежные углы



∠1 и ∠3 } вертикальные
∠2 и ∠4 } углы





✓ Два угла называются ***смежными углами***, если у них одна сторона общая, а две другие являются дополняющими друг друга лучами.

Углы *AOB* и *BOC* на рисунке 1 являются смежными. У них сторона *OB* общая, а лучи *OC* и *OA* лежат на одной прямой и дополняют друг друга.

Активизирующее упражнение

а) Покажите, что сумма смежных углов будет развернутым углом.
б) Покажите, что если смежные углы равны, то они являются прямыми углами.
в) Какие из углов ∠1, ∠2, ∠3 и ∠4, образующихся при пересечении двух прямых (рис.2), являются смежными углами?

Так как смежные углы вместе образуют развернутый угол, то справедливо следующее свойство:

Свойство. **Сумма смежных углов равна 180°.**

✓ ***Вертикальными углами*** называются два несмежных угла, которые образуются при пересечении двух прямых.

Углы ∠α и ∠β – вертикальные. Точно так же и углы ∠γ и ∠λ являются вертикальными.

Теперь докажем следующее свойство вертикальных углов.

Свойство. **Вертикальные углы равны.**

Пусть, ∠α и ∠β данные вертикальные углы, ∠γ – смежный им угол *(рис. 3)*. Нужно доказать, что ∠α = ∠β.

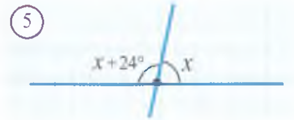
Доказательство: ∠α + ∠γ = 180°, так как углы ∠α и ∠γ смежные.

∠γ + ∠β = 180°, так как углы ∠γ и ∠β также смежные. Из этих равенств следует, что $\angle\alpha + \cancel{\angle\gamma} = \cancel{\angle\gamma} + \angle\beta$, то есть ∠α = ∠β. ***Свойство доказано.***

Итак, при пересечении двух прямых образуются вертикальные и смежные углы. Каждые два смежных угла составляют в сумме один развернутый угол. Если один из них больше 90°, то второй будет меньше 90°. Тот из смежных углов, градусная мера которого меньше, принимается по определению за ***угол между***

пересекающимися прямыми. Например, на рисунке 4 угол между прямыми составляет 30°. Говорят также, что ***«прямые пересекаются под углом 30°»***.

Задача. Один из двух углов, образующихся при пересечении двух прямых, больше второго на 24°. Найдите углы между этими прямыми.



Решение. Как вы знаете, при пересечении двух прямых образуются смежные и вертикальные углы (рис. 5). Вертикальные углы равны. Значит, в условии говорится о смежных углах.

Если обозначить меньший из них через x, то больший угол равен $x+24°$. По свойству смежных углов $x+x+24°=180°$.

Тогда $x=78°$ и $x+24°=102°$. Таким образом, при пересечении прямых a и b получаются углы 78°, 102°, 78°и 102°.

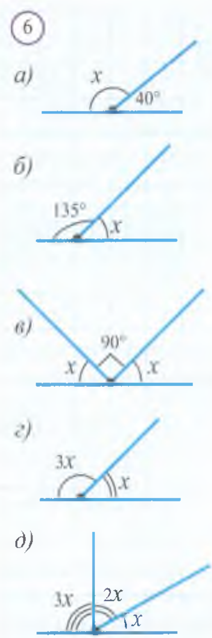
Ответ: 78°, 102°, 78° и 102°.

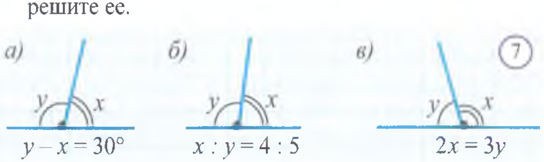
Вопросы и упражнения

1. Какие углы называются смежными?
2. Чему равна сумма смежных углов? Обоснуйте свой ответ.
3. Могут ли смежные углы быть равными друг другу?
4. Какие углы называются вертикальными?
5. Сформулируйте основное свойство вертикальных углов.
6. Найдите углы, смежные для углов: а) 20°, б) 30°, в) 45°, г) 90°.
7. Найдите смежные углы, один из которых втрое больше другого.

8*. Могут ли оба смежных угла быть: а)острыми; б) прямыми; в) тупыми углами?

9. Будут ли углы, смежные равным, также равны?
10. Найдите неизвестный угол x на рисунке 6.
11. Найдите смежные углы, если их градусные меры относятся как а) 2:7; б) 11:25; в) 1:9 .
12. Составите задачу в соответствии с рисунком 7 и решите ее.





15 ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ РАССУЖДЕНИЙ И ИХ ВЗАИМОСВЯЗЬ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ГЕОМЕТРИИ

Мы уже познакомились с целым рядом геометрических фигур и их свойствами.Например, на предыдущем занятии мы узнали, что такое вертикальные углы и показали, что они всегда равны. Вспомните, мы еще не знали, о чем идет речь, но все же доказали утверждение: “Вертикальные углы равны”, проведя необходимые рассуждения. Мы познакомились подобным образом с тем, что называется ***“доказательством”***. Возможно, древнегреческий математик Фалес из Милета (625 –527 гг. до н.э.) был первым, кто ввел в геометрию понятие ***“доказательства”***.

Доказать некоторое утверждение – это значит показать путем логических рассуждений, что оно верно. Утверждение, справедливость которого устанавливается с помощью доказательства, называется ***теоремой***. Формулировка теоремы состоит обычно из условия и заключения. В первой части – условии теоремы, речь идет о том, что известно, в заключении о том, что требуется доказать.

Если смежные углы равны, то каждый из них является прямым углом.

Условие этой теоремы – “равенство смежных углов”, заключение: “каждый из них является прямым углом”. Доказать теорему – это значит, воспользовавшись ее условием, то есть тем, что уже известно о рассматриваемом предмете, путем рассуждений убедиться в справедливости утверждения, содержащегося в заключительной части теоремы. Уточнение того, о чем говорится в условии и заключении теоремы, прояснит ее содержание и облегчит процесс доказательства. Поэтому перед доказательством полезно выделить из формулировки условие и заключение. Например, приведенную выше теорему перепишем в виде:

Дано: $\angle A$ и $\angle B$ смежные углы, $\angle A = \angle B$ ⇒ ***Надо доказать:*** $\angle A = \angle B = 90°$

Условие теоремы ***Заключение теоремы***

В общем случае, разбив формулировку теоремы на условие и заключение, ее можно схематически представить в следующем виде:

Если **имеет место A** то **имеет место B** .

Условие теоремы ***Заключение теоремы***

Основные понятия и аксиомы. Точка, прямая и плоскость считаются основными понятиями геометрии. Мы не определяем их. ***Основные понятия геометрии*** – это понятия, ясные сами по себе. Если сравнить геометрию со зданием, то основные понятия – это его фундамент. С помощью основных понятий даются ***определения*** новых понятий и фигур, т. е. объяснения того, что это такое. В учебнике определения выделены значком, потому что они важны при изучении геометрии.

Кроме того, мы приняли, в качестве очевидных, те свойства, которыми обладают точка, прямая и плоскость. Такие свойства называются ***аксиомами***. Если вы обратили внимание, все аксиомы в учебнике выделены в основном тексте значком. Приведем примеры аксиом, с которыми вы уже познакомились (перепишите оставшиеся аксиомы, разыскав их на страницах учебника):

1. Какова бы ни была прямая на плоскости, существуют точки, которые принадлежат этой прямой, и точки, которые ей не принадлежат.

2. Через любые две точки можно провести одну и только одну прямую.

3. Из трех точек, принадлежащих прямой, одна и только одна лежит между двумя другими.

Геометрические понятия вводятся в определенной логической последовательности. Прежде всего, вводятся основные понятия, лежащие в основе геометрии, и аксиомы, которые не доказываются. Далее с их помощью определяются новые понятия и уточняются их свойства. Часть из них принимается без доказательств, т. е. в качестве аксиом. Остальные свойства формулируются в виде теорем, которые доказываются при помощи логических рассуждений на основе аксиом и уже доказанных теорем. В процессе рассуждений нельзя пользоваться свойствами, справедливость которых не доказана, даже если они кажутся очевидными – это противоречит логике построения геометрии.

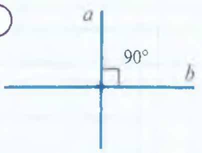
Вопросы, задачи и задания

1. Что такое теорема? Из каких частей она состоит?
2. Как доказываются теоремы?
3. Что вы понимаете под доказательством?
4. Рассмотрите некоторую теорему и разложите ее на части.
5. Что такое определение? Какие понятия принимаются без определения?
6. Что такое аксиома?
7. В какой последовательности принимают геометрические понятия?
8. Если некоторое свойство фигуры очевидно из чертежа, можно ли использовать его без доказательства?
9. Какие из приведенных ниже утверждений приняты без доказательства:
   1) через любые две точки можно провести одну и только одну прямую;
   2) развернутый угол в два раза больше прямого угла;
   3) сумма смежных углов равна 180°;
   4) у каждого отрезка есть только одна середина;
   5) для каждого положительного числа существует отрезок, длина которого равна этому числу.
10. Можно ли принять без доказательства утверждение: «Если для точек A, B, C, D, лежащих на прямой, $AB=CD$, то совпадают середины отрезков AD и BC»?

16 ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫЕ ПРЯМЫЕ

Активизирующее упражнение

Что можно сказать об углах, образующихся при пересечении двух прямых, если один из них прямой угол *(рис. 1)*?



$a \perp b$ *прямой* a перпендикулярна *прямой* b

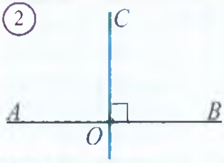
Прямые, пересекающиеся под прямым углом, называются ***перпендикулярными прямыми***. Перпендикулярные прямые пересекаются под углом 90°.

На рисунке 1 прямая a перпендикулярна другой прямой b. Перпендикулярность этих прямых обозначается специальным значком $a \perp b$, что читают так: "прямая a перпендикулярна прямой b" или "прямые a и b взаимно перпендикулярны". При пересечении перпендикулярных прямых образуются четыре прямых угла.

Отрезки, лучи и прямые, лежащие на перпендикулярных прямых, также называются ***взаимно перпендикулярными***.

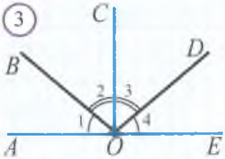
Через любую точку прямой можно провести единственную перпендикулярную ей прямую.

Доказательство. Пусть даны прямая AB и точка O, принадлежащая ей *(рис. 2)*. Известно, что от луча OB можно в заданную полуплоскость отложить угол COB, равный 90°. Тогда прямая CO будет пепендикулярна прямой AB.



Единственность перпендикулярной прямой следует из аксиомы откладывания угла на луче.

Теорема доказана.



Задача 1. На рисунке 3 $\angle 1=\angle 4$, $\angle 2=\angle 3$, покажите, что $CO \perp AE$.

Решение. Пусть $\angle 1=\angle 4=\alpha$, $\angle 2=\angle 3=\beta$. По свойству измерения углов $\angle AOE=\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4=\alpha+\beta+\alpha+\beta=$ $=2\alpha+2\beta=180°$, $2(\alpha+\beta)=180°$, то есть $\alpha+\beta=90°$. Тогда, $CO \perp AE$, так как $\angle AOC=\angle 1+\angle 2=\alpha+\beta=90°$.

Задача 2. Покажите, что если на рисунке 5 $\angle ABC=\angle DBE$, то $\angle ABD=$ $=\angle CBE$.

Решение. Прибавим к обеим частям равенства $\angle ABC = \angle DBE$, $\angle CBD$: $\angle ABC + \angle CBD = \angle CBD + \angle DBE$

Однако, $\angle ABC + \angle CBD = \angle ABD$ и

$\angle CBD + \angle DBE = \angle CBE.$

Следовательно, $\angle ADD = \angle CBE.$

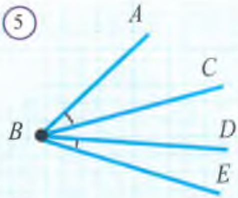
Пусть даны прямая c и точка A, не лежащая на ней. Соединим точку A с некоторой точкой B прямой c. Если отрезок AB перпендикулярен прямой c, то этот отрезок называется ***перпендикуляром, опущенным из точки A на прямую c***. На рисунке 6 отрезок AB – перпендикуляр, опущенный на прямую c. Точка B – ***основание перпендикуляра***.

Если же отрезок AB не перпендикулярен прямой c, то этот отрезок называется ***наклонной*** *(рис. 4)*.

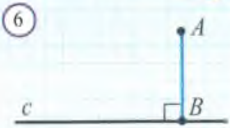
Ясно, что отрезок AB есть кратчайшее расстояние между точками A и B *(рис. 7)*. Поэтому в предыдущих классах мы этот отрезок называли расстоянием между точками A и B.

Точно также примем длину перпендикуляра AB за ***расстояние от точки A до прямой b***. Ясно, что это расстояние короче любой наклонной, ***проведенной из точки A к прямой b*** *(рис. 8)*. К доказательству этого факта мы вернемся позже.

5

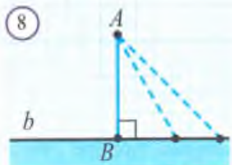


6

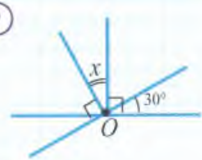


7

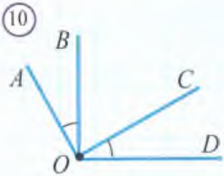
8



9



10



Вопросы, задачи и задания

1. Когда прямые называют перпендикулярными? Приведите пример на чертеже.
2. Сколько перпендикуляров можно опустить из данной точки на прямую? Обоснуйте свой ответ.
3. Чему равна градусная мера прямого угла?
4. Что называют перпендикуляром, опущенным из данной точки на прямую?
5. Что называется наклонной, проведенной из точки к прямой?
6. Сколько наклонных можно провести из точки A к прямой?
7. Найдите неизвестный угол x на рисунке 9.
8. Покажите, что если $OB \perp OD$ и $OA \perp OC$ то, $\angle AOB = \angle COD$ *(рис. 10)*.
9. Что называют расстоянием между точками A и B?
10. Что называют расстоянием от точки до прямой?

17 МЕТОД ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ОТ ПРОТИВНОГО

«Метод доказательства при помощи предположения» (метод доказательства от противного) основан на следующей простой логической задаче. Предположим, что идя по дороге, вы пришли к развилке *(рис. 1)*. Вы знаете, что из этих дорог только одна выведет вас к нужному вам месту в городе. На указателе дорог показано, какой путь приведет вас к цели. Но вы не поверили этому указанию и отправились в путь по другой дороге. Вы шли и шли, пока не вышли к какому-то незнакомому вам селу. Какая же мысль сразу же придет вам в голову? Конечно, вы скажете: "Надпись на указателе была верной!" *(рис. 2)*.

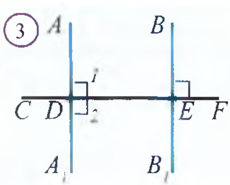
При доказательстве от противного, вы выбираете тот же метод. Предположим, что утверждение, составляющее условие теоремы, выполнено и требуется показать, что заключение тоже верно. Для этого мы предполагаем, что заключение теоремы не верно.

Если на этом пути, в результате логических рассуждений, приходим к выводу, который противоречит утверждению, справедливость которого была доказана или принята в качестве аксиомы, то это означает, что была выбрана неверная "дорога". Это, в свою очередь, означает, что верна первая "дорога", т. е. утверждение, приведенное в условии теоремы, приводит к верному утверждению, составляющему заключение теоремы. Что и доказывает теорему.

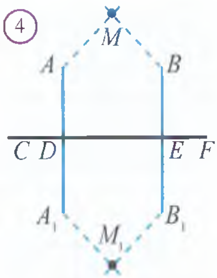
При доказательстве теорем этим методом следует: а) верно сформулировать утверждение, противоположное тому, что надо доказать; б) делать логически обоснованные выводы, следующие из принятого утверждения и прочих известных свойств; в) найти, в чем заключается противоречие с уже известными свойствами.

Две прямые, перпендикулярные одной и той же прямой, не пересекаются.

AA_1, BB_1 и CD прямые, $AA_1 \perp CD$ и $BB_1 \perp CD$ (*рис. 3*) ⇒ прямые AA_1 и BB_1 не пересекаются



Доказательство. Предположим противоположное: прямые AA_1 и BB_1, перпендикулярные CF, пересекаются. И пусть точка M – их точка пересечения *(рис. 4)*. В таком случае она лежит в одной из полуплоскостей, на которые делится плоскость прямой CF (на рисунке 4 пусть это будет верхняя полуплоскость). Так как прямые углы MDC и A_1DC равны, то угол MDC можно отложить в нижнюю полуплоскость. Тогда луч DM совпадет с лучом DA_1. Точно также, если отложить прямой угол MEF в нижнюю полуплоскость относительно прямой EF, то луч TM совпадет с лучом EB_1. И так как лучи DM и EM пересекаются в точке M, то лучи DA_1 и EB_1 также пересекаются в точке M_1 (рис. 4).



В результате получаем следующий вывод: прямые AD и BE пересекаются в двух точках M и M_1. Но имеет место аксиома «через две точки проходит только одна прямая». Следовательно, наше предположение было неверным – прямые, перпендикулярные одной прямой, не пересекаются. ***Теорема доказана.***

Через точку, не лежащую на прямой, проходит единственная прямая, перпендикулярная этой прямой.

Докажите это утверждение самостоятельно.

Существует несколько программ для смартфона, с помощью которых можно измерять величину угла объекта на расстоянии. На рисунке вы видите пример использования такой программы для измерения величины угла при вершине одной из знаменитых Египетских пирамид.

Вопросы, задачи и задания

1. На каком правиле основан метод доказательства от противного?
2. Пусть точки A, B и C лежат на одной прямой и: а) $AB = 3{,}6$; $BC = 5{,}4$; $AC = 9$; б) $AB = 2{,}4$; $BC = 4{,}2$; $AC = 1{,}8$. Докажите, что точка C не может лежать между точками A и B. Какая из этих точек лежит между двумя другими?
3. * Найдите угол между биссектрисами двух смежных углов.
4. * Докажите теорему о равенстве двух вертикальных углов методом доказательства от противного.
5. * Какой из лучей OA, OB и OC проходит между двумя другими лучами, если $\angle AOB = 58°$, $\angle BOC = 17°$ и $\angle AOC = 41°$?
6. Сумма двух углов, образующихся при пересечении двух прямых, равна 120°. Найдите эти углы.
7. Разность двух углов, образующихся при пересечении двух прямых равна 20°. Найдите эти углы.
8. * Докажите, что биссектрисы вертикальных углов лежат на одной прямой.
9. * На плоскости даны три точки A, B, C: $AB = 2{,}6$, $AC = 8{,}3$, $BC = 6{,}7$. Докажите, что эти точки не лежат на одной прямой.
10. * Сумма двух углов, образующихся при пересечении двух прямых, не равна 180°. Докажите методом от противного, что эти углы являются вертикальными.

18 ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ

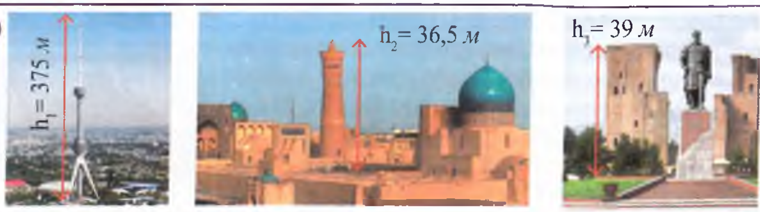
1. Правильное измерение высоты.

Для измерения высоты какого-либо здания нужно определить длину перпендикуляра, опущенного из наивысшей его точки до его основания, лежащего на плоскости. Если же у вас нет возможности опустить такой перпендикуляр, то рассматривают в качестве высоты равный ему отрезок (рис. 1). Например, высоту здания, пирамиды, минарета или глубину колодца. Иногда также определяют и высоты плоских фигур на плоскости.

а) Найдите способ определения высоты чайника, пиалы, кассы, вазы и других домашних предметов и вычислите их высоту.

б) Измерьте высоту моделей прямоугольного параллелепипеда, треугольной пирамиды, конуса, шара и подобных им геометрических фигур.

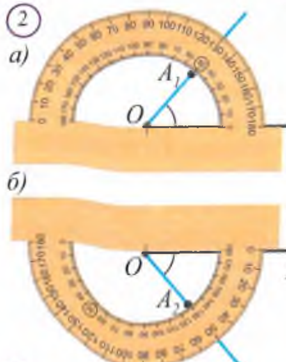
1



2. Как отложить от данного луча угол с заданной градусной мерой.

1. Чертим произвольно выбранный луч OB.
2. Основание транспортира накладываем на луч OB, а его центр совмещаем с точкой O, как показано на рисунке 2.
3. На шкале транспортира находим деление, соответствующее заданной градусной мере, и отмечаем рядом с ним точку A_1 (A_2).
4. Через точки O и A_1 (A_2) проводим луч. Получаем угол A_1OB (A_2OB) с данной градусной мерой.

2



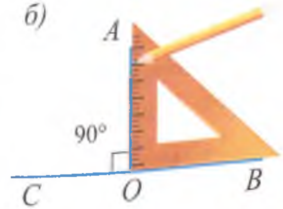
3. Практические способы построения перпендикуляра к прямой:

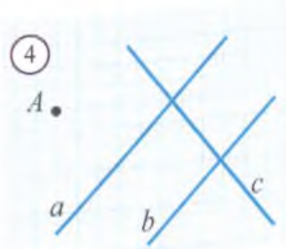
1-ый способ. С помощью транспортира *(рис. 3а).*

2-ой способ. С помощью чертежного угольника *(рис. 3б).*

3

4. С помощью: а) линейки; б) чертежного угольника восставить перпендикуляр к прямой из точки, лежащей на этой прямой.
5. Отметьте на прямой d точки A, B, C и с помощью транспортира проведите через каждую из точек перпендикуляр к прямой d.
6. Начертите прямую b и отметьте точку A, не лежащую на ней. Начертите с помощью угольника прямую, перпендикулярную прямой b и проходящую через точку A.
7. С помощью угольника найдите расстояния от точки A до прямых a, b и c *(рис.4)*.

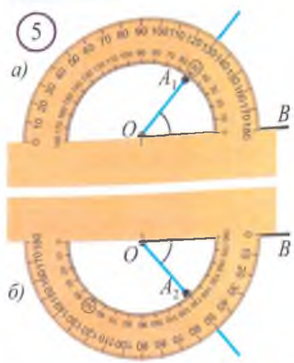




8. От данного луча OB отложить в данную полуплоскость угол 50°.

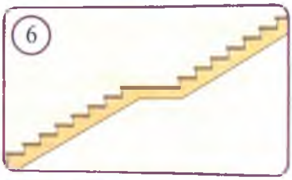
Решение. Основание транспортира накладываем на луч OB, совмещаем его центр с точкой O, находим на шкале деление, соответствующее 50°, и строим угол. Однако прямая OB, которой принадлежит луч OB, разбивает, как мы знаем, плоскость на две полуплоскости. Значит, в каждую полуплоскость можно от данного луча отложить угол, равный 50°, и только один *(рис. 5)*.

$$\angle A_1OB = \angle A_2OB = 50°.$$



9. Угол наклона лестницы.

Лестницы строят под разными углами. С одной стороны, чем менее крутая лестница, тем она удобнее. Но с другой стороны, слишком пологими лестницами пользоваться не очень удобно. Поэтому там, где угол наклона лестницы маленький, ее строят так, как показано на рисунке 6.



При строительстве наиболее удобными считаются лестницы с углом наклона 30°-45°. Обычно в многоэтажных домах строят лестницы с углом подъема 35°-40°. Если угол будет больше 45°, то такая лестница занимает меньше места. Но пользоваться такой лестницей детям и старикам затруднительно.

Лестницу для выхода на крышу строят вертикально, так как для нее отведено очень мало места (*рис. 7*).

Если у вас во дворе достаточно кирпичей, постройте лестницы с различными углами наклона и определите ее удобство.

19 ПОВТОРЕНИЕ МАТЕРИАЛА ГЛАВЫ II

1. Заполните пропуски в предложениях в соответствии со смыслом:

1. Углом называется фигура, состоящая из точки и ...., исходящих из этой точки.
2. Градусная мера развернутого угла равна ....
3. Биссектрисой угла называется ...., исходящий из вершины угла.
4. Два угла, одна сторона которых общая, а две другие образуют прямую линию, называются ....
5. Биссектрисы вертикальных углов образуют ....
6. Если смежные углы ...., то они являются прямыми углами.

2. Если в следующих фразах имеется ошибка, найдите и исправьте ее:

1. Углы, сумма которых равна 180°, – это смежные углы.
2. Прямая, исходящая из вершины угла и делящая угол пополам, называется биссектрисой угла.
3. Угол, обе стороны которого лежат на лучах, называется развернутым углом.
4. Углы, получающихся при пересечении двух прямых, называются вертикальными.
5. От начала данного луча можно отложить только один прямой угол.
6. Сумма вертикальных углов равна 180°.

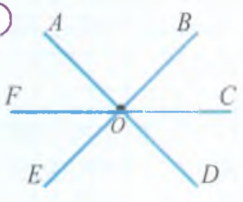
3. Запишите термин, соответствующий данному свойству:

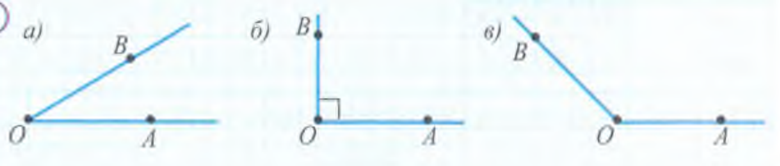
Сумма равна 180°	Стороны являются лучами
Угловая величина равна 180°	Делит угол пополам
Образуется при пересечении прямых	

4. Сопоставьте геометрическому понятию, данному в первом столбце, соответствующее свойство или толкование, взятое из второго столбца:

Геометрическое понятие	*Толкование, свойство*
1. 1 градус	А. Сумма равн 180°
2. Градусная мера развернутого угла	Б. Углы, равные между собой
	В. 180°
3. Вертикальные углы	Г. 1/90 часть прямого угла
4. Смежные углы	Д. Истина, принимаемая без доказательства
5. Теорема	Е. Истина, требующая доказательство
6. Аксиома	Ж. Делит угол пополам
7. Биссектриса	

1. Постройте с помощью транспортира углы 10°, 20°, 40°, 60°, 90°, 130°, 170° имеющие общую сторону.
2. Какие углы образует биссектриса развернутого угла с его сторонами?
3. Какова градусная мера угла, если его биссектриса составляет угол, равный 30° с его стороной?
4. Может ли биссектриса угла составлять тупой угол с его стороной?
5. Найдите угол между биссектрисами углов AOB и BOC, если $\angle AOB=50°$, $\angle COB=80°$. Сколько решений имеет задача?
6. Сколько градусов составит наблюдаемый в лупу угол 15°, если посмотреть на него в лупу с десятикратным увеличением?
7. Постройте с помощью транспортира биссектрисы углов а) 90°; б) 60°; в) 50°; г) 20°.
8* Постройте с помощью транспортира биссектрису OK $\angle AOB=120°$ Затем постройте биссектрисы получившихся углов AOK и KOB и найдите угол между ними.
9. Сколько пар вертикальных углов представлено на рисунке 1?
10* Сколько времени на часах, если угол между часовой и минутной стрелками равен 45°, а минутная стрелка стоит на цифре 6?
11. Известно, что углы AOB и BOC являются смежными. Найдите эти углы, если:
а) угол AOB больше угла BOC на 40°;
б) угол AOB в 4 раза меньше угла BOC;
в) $\angle AOB = \angle BOC + 44°$;
г) $\angle AOB = 5 \cdot \angle BOC$.
12. При пересечении двух прямых получилось 4 угла. Найдите градусную меру каждого угла, если сумма величин двух из них равна 100°.
13. На рисунке 2 через точки A и B к сторонам угла проведите перпендикулярные прямые. Какие углы образуют эти прямые в точке пересечения?

1


2


20 2-АЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

Контрольная работа, взятая за образец, состоит из двух частей, в первую часть входят 3 из приведенных ниже задач (или подобные им). Во второй части предлагаются пять из приведенных ниже тестов.

Задачи:

1. Сумма вертикальных углов $\angle MOL$ и $\angle KON$, образующихся при пересечении прямых MN и KL равна 148°. Найдите угол $\angle MOK$.
2. Разность смежных углов равна 60°. Найдите меньший из этих углов.
3. Биссектриса угла образует с его стороной угол 66°. Найдите угол, смежный с этим углом.

4*. Докажите, что биссектрисы смежных углов пересекаются под прямым углом.

Тесты (из данных ответов выберите один правильный):

1. Найдите меньший из смежных углов, если их разность равна 24°.

   А) 72°; Б) 76°; В) 78°; Г) 82°.

2. Сумма трех углов, образующихся при пересечении двух прямых, равна 200°. Найдите меньший из углов.

   А) 20°; Б) 40°; В) 60°; Г) 80°.

3. Биссектриса данного угла образует с его стороной угол 60°. Найдите угол, смежный данному углу:

   А) 30°; Б) 60°; В) 90°; Г) 120°.

4. Какова градусная мера угла, образованного стрелками часов в 4 часа?

   А) 60°; Б) 75°; В) 105°; Г) 120°.

5. $AB = 6$, $C \in AB$, $AC = 3BC$, $BC = ?$

   А) 1; Б) 1,5; В) 2; Г) 3.

6. На какой угол повернется часовая стрелка за 30 минут?

   А) 180°; Б) 15°; В) 60°; Г) 30°.

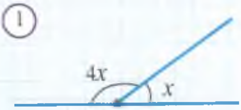
7. $AB = 18$, $C \in AB$, $AC - BC = 4$, $BC = ?$

   А) 7; Б) 8; В) 10; Г) 11.

8. Сумма вертикальных углов 180°. Найдите эти углы:

А) 60° и 120°; Б) 45° и 135°;
В) 90° и 90°; Г) 45° и 45°.

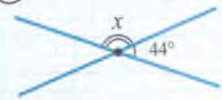
1



9. Найдите величину угла x по рисунку 1.

А) 30°; Б) 36°; В) 45°; Г) 60°.

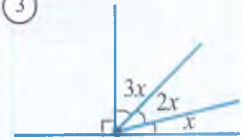
2



10. Найдите величину угла x по рисунку 2.

А) 136°; Б) 72°; В) 56°; Г) 96°.

3



11. Найдите величину угла x по рисунку 3.
А) 15°; Б) 30°; В) 45°; Г) 60°.

12. Найдите верное высказывание:

А) На плоскости через данную точку можно провести только одну прямую;
Б) Часть прямой, состоящая из точек, лежащих по одну сторону от некоторой ее точки, называется лучом;
В) Часть прямой, состоящая из точек, лежащих между двумя ее точками, называется отрезком;
Г) От каждого луча можно отложить только один угол.

13. Найдите верное высказывание.

А) Смежные углы – это развернутый угол;
Б) Если $AB = 5$ см, $BC = 6$ см, то $AC = 11$;
В) Если углы равны, то они являются вертикальными;
Г) Если два угла равны, то углы, смежные с ними, также равны.

Дополнительное задание для интересующихся учеников.

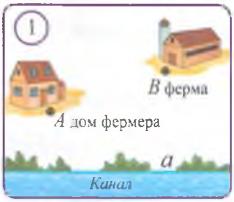
1. Познакомьтесь со страницами главы, соответствующей данной, в электронной версии учебника «Геометрия–7». Проверьте свои знания, выполнив данные задания и решив тесты в интерактивных анимационных приложениях к темам упомянутой главы.

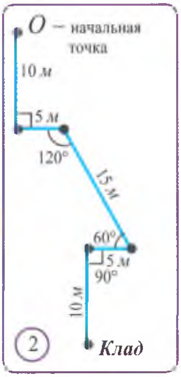
2. Кроме того, найдите приведенные на странице 142 материалы из интернет ресурсов, относящиеся к упомянутой главе, и изучите их.

Дополнительный материал для развития практической компетенции

1. На рисунке 1 дан план фермерского хозяйства.

1) Фермер намеревается проложить дорогу от дома до фермы. Вы сумеете посоветовать ему, по какой прямой следует построить дорогу? Почему? Начертите этот путь на плане.
2) Фермер хочет проложить кратчайшую дорогу и до канала. Какой путь вы ему посоветуете? Почему? Начертите этот путь на плане.





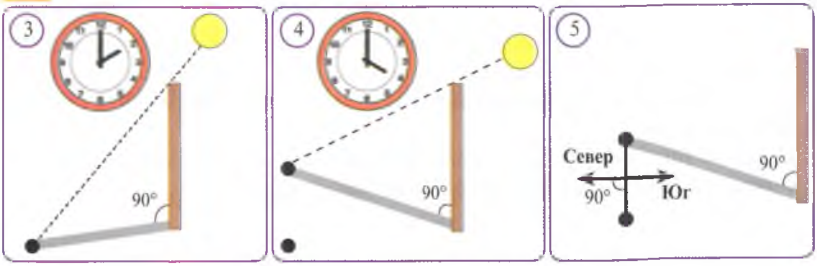
2. Геометрические соревнования на чистом воздухе.

В соревновании могут принять участие две или более групп. В каждой группе разрешается пользоваться рулеткой и большим транспортиром.

Класс разбитый на группы, трудится в разных уголках школьной площадки. "Клад" (например, шарик, письмо в конверте, ...) вначале прячут где-то на площадке. План, ведущий к кладу, готовится учителем заранее и передается группам. (Образец плана показан на рисунке 2). Группы начинают поиски клада, руководствуясь своими планами. Группа, которая первой пройдет вдоль всей ломаной, показанной на плане и найдет клад, будет объявлена победителем.

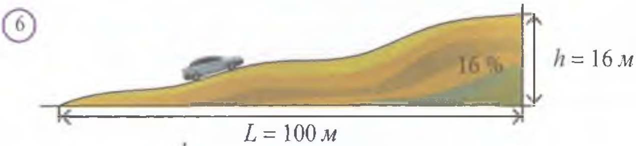
3. Задание. Составьте план пути, подобный изображенному на рисунке 2, по которому вы идете из дома в школу. Определите примерную длину пути.

4. Определение севера и юга при помощи вертикального шеста.



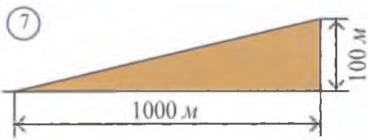
1) Прикладываем шест вертикально к земле (Угол между всеми сторонами шеста и землей должен равняться 90°) и отмечаем конец тени. Это метка запада *(рис. 3)*.
2) Через два часа отмечаем второй раз. Это метка востока *(рис. 4)*.
3) Через середину полученного отрезка под прямым углом проводим прямую. В результате получаем перпендикуляр. Этот перпендикуляр показывает север и юг *(рис. 5)*.

5. Степень крутизны подъема определяется отношением его высоты к длине основания и оформляется в процентах (%) *(рис. 6)*.



$$T = \frac{h}{L} \times 100\% = \frac{16\ м}{100\ м} \times 100\% = 16\ \%$$

6. Определите степень крутизны холма на рисунке 7.



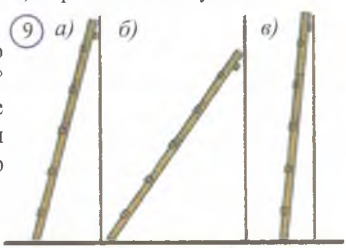
Знак, указывающий на степень крутизны подъема на дороге *(рис. 9)*.

7. Дан $\angle AOB$. Имеют ли смысл следующие равенства $\angle AOB = \angle BOA$; $\angle AOB = \angle ABO$; $\angle AOB = \angle OAB$?

8. Как можно построить биссектрису одного из углов прямоугольного листа?

9. Можно ли разделить на 4 равные части угол, вырезанный из бумаги?

10. Чтобы залезть на крышу нужно установить лестницу под углом 75° по отношению к стене. Определите с помощью транспортира на каком из рисунков 9*а*, 9*б* или 9*в* верно приставлена лестница.

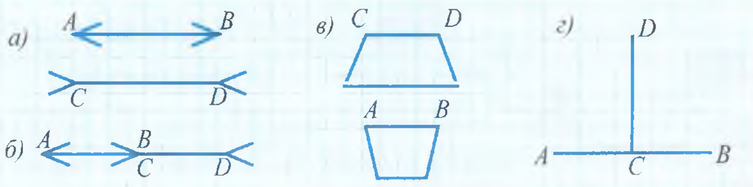


11. Начертите прямую. Через точку, не лежащую на этой прямой, проведите к ней перпендикуляр и несколько наклонных. Измерьте длины перпендикуляра и наклонных и сравните их. Какой отрезок самый короткий? Оформите ваш ответ в виде предположения (гипотезы).

12. Отрезки *AB* и *CD*, изображенные на рисунке 10, сравните "на глаз", затем проверьте с помощью кальки свои выводы.

Вывода: При выполнении работ на измерение и сравнение "на глаз": легко ошибиться!

10



К титульному листу главы II на странице 27

1. Измерьте углы букв на рисунке 2. Какие это углы?
2. Сколько процентов составляет степень крутизны пандуса на рисунке 3?
3. Измерение углов при помощи пальцев *(рис. 3)*.
4. Определение перпендикулярности стены относительно земли при помощи отвеса *(рис. 5)*.
5. Какие углы вы видите на рисунке 7? Что вы можете сказать о лестницах и лесенках на рисунке?
6. Удобны ли лестницы на рисунках 8-10?

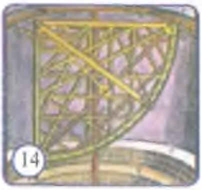
Странички истории

Астролябия -- астрономический инструмент для измерения углов, изобретенный древнегреческим астрономом Гиппархом во II веке до нашей эры (рис. 11). С помощью этого простого инструмента можно было измерять десятки углов. В Самаркандской астрономической обсерватории Улугбека производились работы по измерению углов между светилами. В этой большой обсерватории было много астрономических инструментов (рис. 12). К ним относился не имевший аналогов вертикальный квадрант для измерений углов и геометрических вычислений. Он имел радиус 42 м! С помощью этого инструмента Улугбек уточнил положение 1018 звезд на небесной сфере и привел эти данные в своем труде "Гураганский зидж". На рисунке 13 изображена сохранившаяся под землей часть этого квадранта. Сравните его размеры с европейским средневековым квадрантом (рис. 14). Он на много меньше квадранта Улугбека. Сегодня в геодезической практике для измерения углов используется теодолит.


11


12


13


14

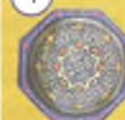
ГЛАВА III

МНОГОУГОЛЬНИКИ И ТРЕУГОЛЬНИКИ

2


3


1


4


5


7


8


9

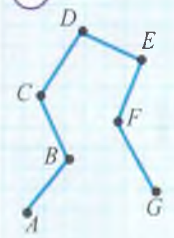

6


10


11


12


21 ЛОМАНАЯ. МНОГОУГОЛЬНИК



1

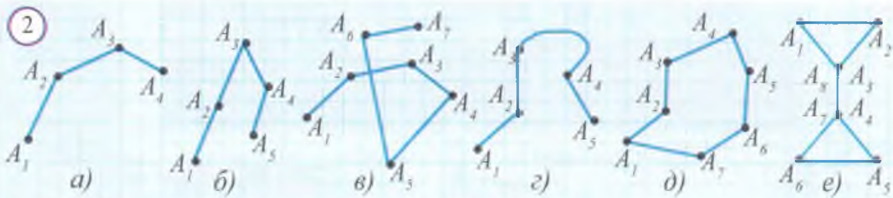
ABCDEFG – ломаная;
A, B, C, D, E, F, G – вершины ломаной;
AB, BC, CD, DE, EF, FG — звенья (стороны) ломаной.

Ломаной называется фигура, состоящая из отрезков $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n$ таких, что никакие два последовательных отрезка не лежат на одной прямой.

Точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются ***вершинами*** ломаной, отрезки $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n$ – ***звеньями*** или ***сторонами*** ломаной. На рисунке 1 изображена ломаная $ABCDEFG$. Сумму длин ломаной называют ее ***длиной***.

Если начальная и конечная вершины ломаной совпадают, она называется ***замкнутой ломаной***.

Упражнение. На рисунке 2 определите какая из линий является ломаной и обоснуйте свой ответ.



Замкнутая ломаная без самопересечений называется ***многоугольником***.

Иначе говоря, стороны многоугольника, не являющиеся смежными, не имеют общих точек.

Активизирующее упражнение

Перечислите, в соответствии с определением многоугольника, его свойства, и определите, является ли фигура, данная на рисунке 3, многоугольником.

По числу вершин (сторон), многоугольник называется треугольником, четырехугольником, шестиугольником, в общем случае ***n-угольником***. С примерами многоугольников вы познакомились в младших классах.

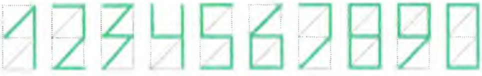
Каждый многоугольник делит плоскость на две области. Конечная часть плоскости, ограниченная многоугольником, называется его ***внутренней областью***, бесконечная – ***внешней областью***. На рисунке 4 показаны в цвете внутренняя *(рис. а)* и внешняя *(рис. б)* области шестиугольника $ABCDEF$.

4

Вопросы, задачи и упражнения

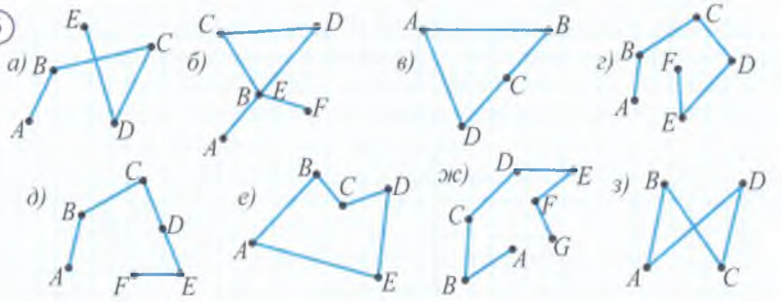
1. Что такое ломаная?
2. Начертите ломаную, обозначьте ее вершины и покажите на чертеже ее звенья.
3. Чему равна длина ломаной?
4. Приведите примеры замкнутых ломаных.
5. В классе, школе, дома найдите предметы, напоминающие замкнутые ломаные.
6. Что такое многоугольник? Приведите примеры.
7. Какие элементы имеет многоугольник?

5



8. Какими ломаными представлены цифры?
9*. Какие из фигур на рисунке 6 являются а) ломаными; б) замкнутыми ломаными; в) многоугольниками.

6



10. Найдите длины ломаных на рисунке 6, измерив при помощи линейки длины ее звеньев.
11. Начертите 5-звенную ломаную, смежные звенья которой взаимно перпендикулярны. Может ли быть такая ломаная замкнутой?

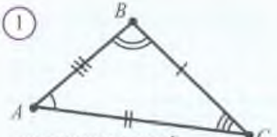
22 ТРЕУГОЛЬНИК. ВИДЫ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Обозначим на плоскости три точки, не лежащие на одной прямой. Если соединить их между собой отрезками, то получится ***треугольник*** *(рис.1)*. Точки будут его ***вершинами***, отрезки его ***сторонами***. Обычно, вместо слова “треугольник” используется значок Δ: Запись “ΔABC” читается “треугольник ABC”. Углы $\angle BAC$, $\angle ABC$, $\angle ACB$ называются углами треугольника. Иногда их точнее называют внутренними углами треугольника (рис.1).

Углы треугольника можно обозначать и в виде $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$. Стороны и углы треугольника называются его ***элементами***. Сумма длин всех трех сторон треугольника называется его ***периметром***. Он обозначается заглавной буквой P. При этом используют выражения:

$\angle BAC$ – угол лежащий между сторонами AB и AC;
стороны AB и AC стороны, прилежащие к углу A;
сторона BC сторона, противолежащя к углу BAC.

1

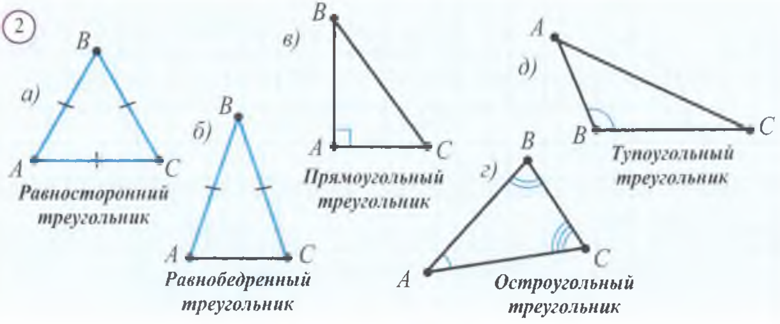


разносторонний треугольник

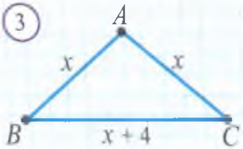
ΔABC – треугольник
точки A, B, C – вершины треугольника
отрезки AB, BC, AC – стороны треугольника
$\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ – углы треугольника
$P = AB + BC + AC$ – периметр треугольника

В зависимости от сторон и углов треугольники делятся на следующие виды:
– если все стороны равны, то ***треугольник равносторонний*** (*рис. 2а*);
– если две стороны равны, то ***треугольник равнобедренный*** (*рис. 2б*);
– если все стороны разные, то ***треугольник разносторонний*** (*рис. 1*);
– если один угол прямой, ***то треугольник прямоугольный*** (*рис. 2в*);
– если все углы острые, ***то треугольник остроугольный*** (*рис. 2г*);
– если один угол тупой, ***то треугольник тупоугольный*** (*рис. 2д*).

2



3



Задача. Основание равнобедренного треугольника с периметром 28 см, на 4 см больше боковой стороны. Найдити его стороны.

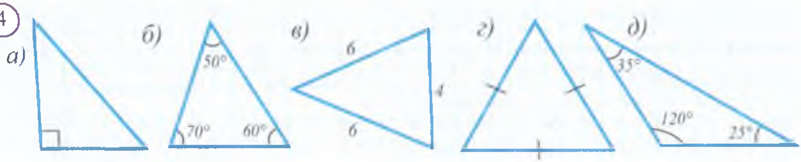
Решение: Обозначим боковую сторону треугольника ABC через x тогда основание будет $x+4$ *(рис. 3)*. Так как по условию. $P = x + x + x + 4 = 3x + 4 = 28$ *(см)*, $x = 8$ *см*. Значит, $AB = AC = 8$ *см*; $BC = 12$ *см*.

Ответ: 8 *см*; 8 *см*; 12 *см*.

Вопросы, задачи и задания

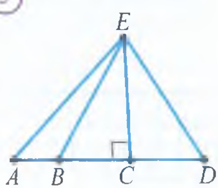
1. Какая фигура называется треугольником?
2. Из каких элементов состоит треугольник?
3. Чему равен периметр треугольника?
4. В треугольнике PQR:
   а) какая сторона противолежит $\angle P$?
   б) какие углы прилежат к стороне PQ?
   в) какой угол лежит между сторонами PQ и QR?
   г) против какого угла лежит сторона PR?
   Постарайтесь ответить на эти вопросы, не глядя на фигуру.
5. Какие виды треугольников вы знаете? Начертите треугольник каждого вида. Обозначьте их. Исходя из определения видов треугольников, определите их особенности.
6. Определите виды треугольников на рисунке 4.

4



7. Постройте "на глаз" треугольник с тремя равными сторонами. Затем измерьте его стороны и проверьте, равны ли они.

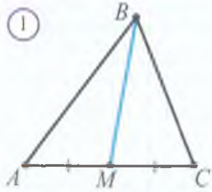
5



8. Сколько треугольников на рисунке 5 имеют одну вершину: *а*) в точке A; б) в точке B; в) в точке C?
9. Треугольники каких видов вы видите на рисунке 5? Запишите их в тетрадь в соответствии с видами.
10. Начертите треугольник и обозначьте вершины. Измерьте при помощи линейки длины его сторон и найдите периметр.
11. Одна сторона равнобедренного треугольника равна 3 см, а другая 4 см. Найдите его периметр (рассмотрите два случая).

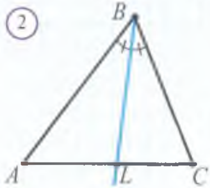
23 ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ТРЕУГОЛЬНИКА: МЕДИАНА, ВЫСОТА И БИССЕКТРИСА

Соедините вершину B треугольника ABC с серединой противолежащей стороны, точкой M (*рис. 1*). Отрезок BM называется ***медианой треугольника*** ABC. Говорят, что эта медиана проведена из вершины B к стороне AC.



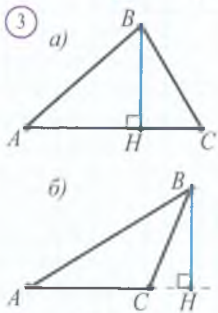
> *Отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противолежащей ей стороны, называется* ***медианой треугольника.***

Проведем биссектрису угла B треугольника ABC (рис. 2). Обозначим точку пересечения биссектрисы со стороной AC через L. Полученный отрезок BL называется ***биссектрисой треугольника*** ABC.

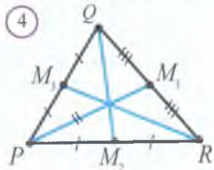


> *Отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину треугольника с точкой противолежащей ей стороны, называется* ***биссектрисой треугольника.***

Опустим из вершины B треугольника ABC перпендикуляр на прямую, содержащую сторону AC (*рис. 3а*). (Обратите внимание: перпендикуляр может не проходить через сторону треугольника. Тогда рассматривают прямую, проходящую через сторону, лежащую против вершины B (*рис. 3б*). Обозначим основание перпендикуляра через H. Отрезок BH называется ***высотой треугольника*** ABC:



> *Перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника на прямую, содержащую противолежащую вершине сторону, называется* ***высотой треугольника.***



Каждый треугольник имеет три вершины, а значит, и три медианы, биссектрисы и высоты.

На рисунке 4 отрезки PM_1, QM_2 и RM_3 — медианы треугольника PQR.

На рисунке 5 отрезки AH_1, BH_2 и CH_3 — биссектрисы треугольника ABC.

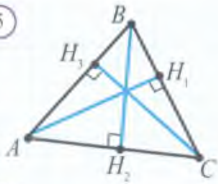
На рисунке 6 отрезки ML_1, NL_2 и KL_3 — высоты треугольника MNK.

Свойства этих важных элементов треугольника вы изучите позже.

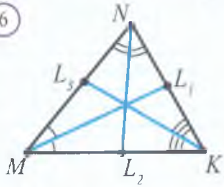
Упражнение. Проведите все высоты тупоугольного треугольника.

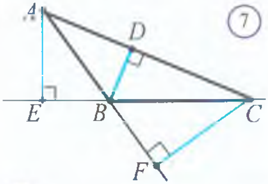
Выполнение: У треугольника, в частности, тупоугольного треугольника, имеются три высоты. Рассмотрим треугольник ABC (*рис. 7*). Высота BD, проведенная из вершины тупого угла, проходит внутри треугольника. Для того чтобы опустить высоту из вершины A, надо продолжить сторону BC за точку B и из вершины A опустить перпендикуляр на луч BE. Полученный отрезок AE будет высотой треугольника ABC, проведенной из вершины A. Точно также на продолжение стороны AB за точку B можно опустить высоту CF.

5



6





7

8

Вопросы, задачи и задания

1. Что такое медиана треугольника? Сколько медиан у треугольника? Начертите и покажите на чертеже.
2. Что такое высота треугольника? Сколько высот у треугольника? Начертите и покажите на чертеже.
3. Что такое биссектриса треугольника? Сколько биссектрис у треугольника? Начертите и покажите на чертеже.
4. В чем сходство и в чем различие между биссектрисой угла и биссектрисой треугольника.
5. Какие из рассмотренных элементов треугольника всегда проходят внутри треугольника?

6*. В каком треугольнике все высоты пересекаются в одной из вершин?

7*. Может ли высота треугольника быть меньше любой из его сторон?

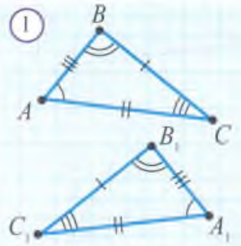
8. Найдите высоту треугольника с периметром, равным 36, если она разбивает его на два треугольника с периметрами 18 и 24.
9. Найдите биссектрису треугольника с периметром, равным 36, если она разбивает его на два треугольника с периметрами 24 и 30.
10. В треугольнике ABC стороны AB и BC равны, а медиана BD равна 4 см. Найдите периметр треугольника ABC, если периметр треугольника ABD равен 12 см.

Геометрические головоломки

1. Сложите 2 треугольника из 5 равных палочек.
2. Сложите 5 треугольников из 9 равных палочек.
3. Сколько имеется равнобедренных треугольников с вершинами в точках, данных на рисунке 8?

24 ПЕРВЫЙ ПРИЗНАК (СУС – СТОРОНА-УГОЛ-СТОРОНА) РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ

1



$\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$:

$AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$

$\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$,

$\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$,

$\angle ACB = \angle A_1C_1B_1$

Познакомимся с понятием равенства геометрических фигур. Если применить его к треугольникам, то получим следующее выраженис: два трсугольника равны, если их можно совместить, накладывая друг на друга. На рисунке 1 треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны. Выбрав любой из них, можно совместить сго с другим. При этом три вершины и три стороны одного совпадут с соответствующими вершинами и сторонами второго. Очевидно, при этом углы одного треугольника совместятся с соответствующими углами второго.

Равенство треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ записывается в виде.

$$\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1.$$

На чертеже равные углы отмечаются равным число дужек, равные стороны – равным числом черточек, как это показано на рисунке 1.

(Признак СУС равенства треугольников). Если две стороны и угол, заключенный между ними одного треугольника, соответственно равны двум сторонам и углу, заключенному между ними другого треугольника, то такие треугольники равны (рис. 2)

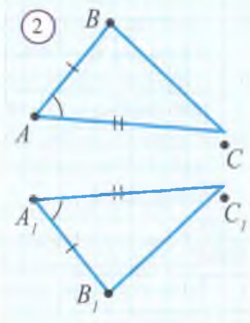
ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$
$AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$ $\Rightarrow$ $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$

Доказательство. Так как $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$, то треугольник ABC можно наложить на треугольник $A_1B_1C_1$ так, чтобы вершина A совместилась с вершиной A_1, а стороны AB и AC наложились на лучи A_1B_1 и A_1C_1 соответственно. Тогда точка B будет лежать на луче AB, а точка B_1 будет лежать на луче A_1B_1.

Так как $AB = A_1B_1$ и $AC = A_1C_1$, то сторона AB совместится со стороной A_1B_1, сторона AC – со стороной A_1C_1. Тогда точка B совместится с точкой B_1, точка C – с точкой C_1. Но в таком случае, стороны B_1C_1 и BC также совместятся. Следовательно, совместятся все три вершины треугольников ABC и $A_1B_1C_1$. Таким образом, $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

Теорема доказана.

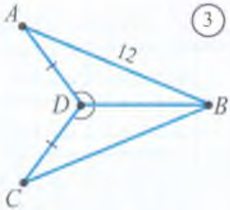
2



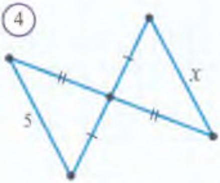
Задача. Найдите отрезок BC, используя данные, приведенные на рисунке 3.

Решение: Рассмотрим треугольники ADB и CDB. Тогда $AD=DC$, $\angle ADB=\angle CDB$, BD – их общая сторона. Значит, по признаку СУС равенства треугольников $\Delta ADB = \Delta CDB$, в частности, $CB=AB=12$.

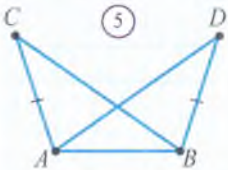
Ответ: 12.

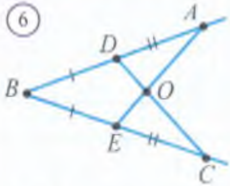


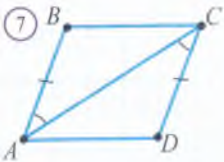
Вопросы, задачи и задания

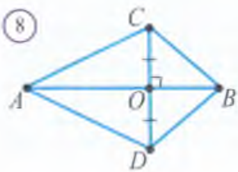


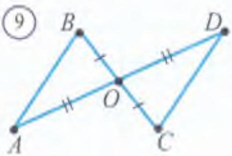
1. Какие треугольники называются равными?
2. Равенство каких элементов следует из равенства $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ треугольников?
3. С помощью каких элементов устанавливается по признаку СУС равенство треугольников?
4. Сформулируйте признак СУС равенства треугольников.
5. Найдите неизвестный отрезок x на рисунке 4.
6. Покажите на рисунке 5, что из равенства $\angle CAB = \angle ABD$ следует, что $AD = BC$.
7. Покажите на рисунке 6, что $\angle BAO = \angle BCO$.
8. Покажите на рисунке 7, что $\Delta ABC = \Delta CDA$.
9. Покажите на рисунке 8, что $\Delta ABC = \Delta ABD$.
10. Отрезки AD и BC пересекаются в точке O и делятся этой точкой пополам (*рис. 9*). Докажите, что,
    а) $\Delta AOB = \Delta DOC$; б) $BD = AC$;
    в) $\Delta ABD = \Delta DCA$.
    г) Найдите углы D и C ΔDOC, если в треугольнике AOB имеем $\angle A = 35°$ и $\angle B = 62°$.
11. На рисунке 10 найдите неизвестный угол x.
12. Периметр одного треугольника больше периметра другого. Могут ли быть равными эти треугольники?

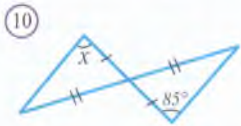








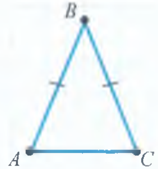




25 СВОЙСТВА РАВНОБЕДРЕННОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

Треугольник, две стороны которого равны, называется, как было сказано, ***равнобедренным треугольником***. Равные стороны равнобедренного треугольника называются его ***боковыми сторонами***, третья сторона называется ***основанием***, а вершина, лежащая против основания ***вершиной*** (рис. 1)

1



ABC – равнобедренный треугольник
AB, BC – боковые стороны
AC – основание, B – вершина

Углы при основании равнобедренного треугольника равны.

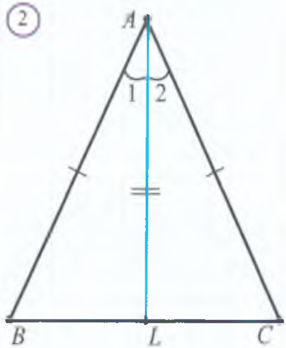
$\Delta ABC,\ AB = AC$ ⇒ $\angle B = \angle C$

Доказательство. Пусть отрезок AL – биссектриса треугольника ABC (*рис. 2*). Рассмотрим треугольники ABL и ACL. Во-первых, сторона, AL – общая, во-вторых, $AB=AC$ по условию теоремы, т. е. ΔABC – равнобедренный. Наконец, $\angle 1 = \angle 2$, так как AL – биссектриса.

Тогда, по признаку СУС равенства треугольников, $\Delta ABL = \Delta ACL$.

Если два треугольники равны, то углы, лежащие против равных сторон также равны. Значит, $\angle B = \angle C$. ***Теорема доказана.***

2



Геометрическое исследование

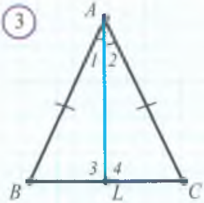
Начертите несколько равнобедренных треугольников. Проведите биссектрисы их углов при вершине. Сравните длины отрезков, на которые точка пересечения биссектрисы с основаниям, разбила основания этих треугольников. Какой вывод можно сделать? Затем измерьте углы, которые биссектриса образует с основаниями. Какой вывод из этого следует? Сформулируйте выводы в виде утверждения. Можно ли утверждать, что этими свойствами обладает любой равнобедренный треугольник?

Биссектриса, проведенная к основанию равнобедренного треугольника, является также его медианой и высотой *(рис. 3)*.

$\Delta ABC,\ AB = AC,\ AL$ – биссектриса ⇒ AL – медиана и высота

Доказательство. Если отрезок AL биссектриса треугольника ABC, то по доказанной выше теореме $\Delta ABL=\Delta ACL$. Из равенства треугольников следует, что $BL=LC$ и $\angle 3=\angle 4$.

3



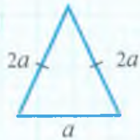
Значит, точка L – середина стороны BC, AL – медиана треугольника ABC.

Так как $\angle 3 = \angle 4$ и эти углы – смежные, то они являются прямыми углами.

Таким образом, отрезок AL будет также и высотой треугольника.

Теорема доказана.

4

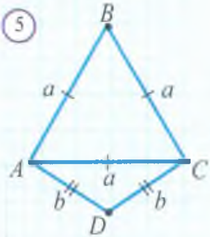


Вывод. Итак, биссектриса угла при вершине равнобедренного треугольника является также его медианой и высотой.

Упражнение.

Что можно сказать о биссектрисах, медианах и высотах равностороннего треугольника?

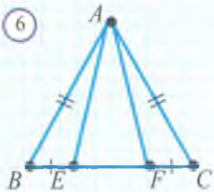
5



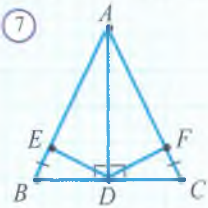
Вопросы, задачи и задания

1. Какие треугольники называются равнобедренными?
2. Какие углы равнобедренного треугольника равны?
3. На рисунке 4 периметр $P = 50$ *см*, $a = ?$
4. На рисунке 5 $P_{ABC} = 36$ и $P_{ADC} = 28$, $a = ?$, $b = ?$
5. Докажите, что в равнобедренном треугольнике равны медианы, проведенные к боковым сторонам.
6. На рисунке 6 имеем $AB = AC$, $BE = FC$. Докажите, что а) $\Delta ABE = \Delta ACF$; б) $AE = AF$; в) $\Delta ABF = \Delta ACE$.
7. На рисунке 7 имеем $AB = AC$, $BE = CF$. Докажите равенства а) $\Delta AED = \Delta AFD$; б) $\Delta BED = \Delta CFD$.
8. Докажите, что в равностороннем треугольнике все углы равны.
9.* Докажите, что если в двух равнобедренных треугольниках равны основания и высоты, опущенные на основания, то эти треугольники равны.
10. В равнобедренном треугольнике основание больше боковой стороны на 3 *см*, но меньше суммы боковых сторон на 5 *см*. Найдите стороны треугольника.
11. Докажите, что если соединить середины сторон равнобедренного треугольника, то получится равнобедренный треугольник.
12. Докажите, что если соединить середины сторон равностороннего треугольника, то получатся 4 равных друг другу равносторонних треугольника.

6



7

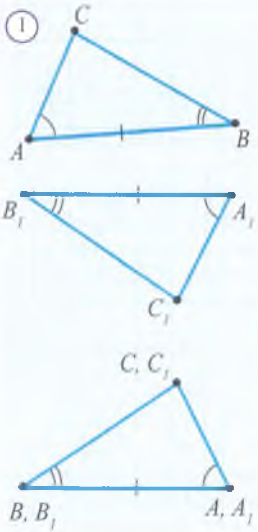


26 ВТОРОЙ ПРИЗНАК (УСУ – УГОЛ-СТОРОНА-УГОЛ) РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Рассмотрим признак равенства треугольников по стороне и двум прилежащим к ней углам. В дальнейшем этот признак будем называть “признак УСУ ”.

***(Признак УСУ равенства треугольников).* Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то эти треугольники равны *(рис. 1)*.**

ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$, $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$ ⇒ $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$

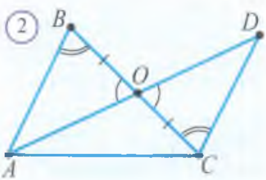


Доказательство. Наложим треугольник ABC на треугольник $A_1B_1C_1$ так, чтобы совместились вершины A и A_1, стороны AB и A_1B_1 и вершины C и C_1 лежали по одну сторону от прямой A_1B_1.

Тогда сторона AC пойдет по лучу A_1C_1, так как $\angle A = \angle A_1$, сторона BC – по лучу B_1C_1, так как $\angle B = \angle B_1$. Поэтому точка C, будучи общей точкой лучей AC и BC, будет также и общей точкой лучей A_1C_1 и B_1C_1. В таком случае точка C совместится с точкой C_1 – общей точкой лучей A_1C_1 и B_1C_1. В результате совместятся стороны AC и A_1C_1, BC и B_1C_1. Таким образом, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ совпадут, что и означает их равенство.

Теорема доказана.

Задача. Используя данные рисунка 2, докажите, что $\Delta AOB = \Delta DOC$.



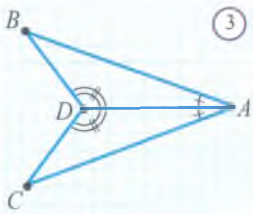
Решение: Углы $\angle AOB$ и $\angle DOC$ равны как вертикальные.

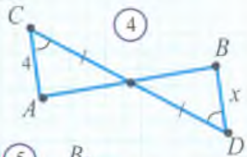
Таким образом,

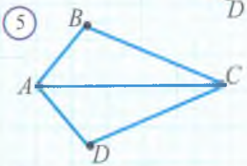
$BO=OC$, $\angle ABO=\angle DCO$, $\angle AOB=\angle DOC$ и по признаку УСУ равенства треугольников $\Delta AOB=\Delta DOC$.

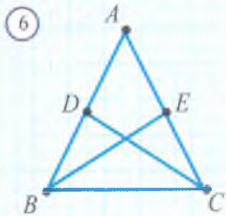
Вопросы, задачи и задания

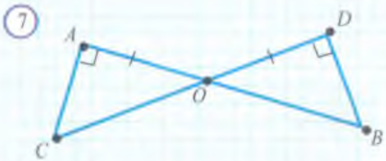
1. Сравнением каких элементов устанавливается равенство треугольников по признаку УСУ?
2. Сформулируйте признак УСУ равенства треугольников.
3. Докажите, что $\Delta ABD=\Delta ACD$ на рисунке 3.
4. Найдите неизвестную x на рисунке 4.
5. Докажите, что $\Delta ABC=\Delta ADC$ на рисунке 5, если отрезок AC лежит на биссектрисах углов BAD и BCD.
6. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$: $AB=A_1B_1$, $BC=B_1C_1$ и $\angle B=\angle B_1$. На сторонах AB и A_1B_1 выбраны точки D и D_1 так, что $\angle ACD=\angle A_1C_1D_1$. Докажите, что $\Delta BCD=\Delta B_1C_1D_1$.
7. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O. Докажите, что треугольники ACO и DBO равны, если $BO=CO$ и $\angle ACO=\angle DBO$.
8. Докажите, что если $AB=AC$ в треугольнике ABC и BE и CD его биссектрисы, то $BE=CD$ *(рис. 6)*.
9. Докажите, что $\Delta OAC=\Delta ODB$ *(рис. 7)*.
10. Треугольники ABC и ADC равны. Точки B и D лежат по разные стороны от прямой AC. Докажите, что треугольники ABD и BCD равнобедренные.
11. На основе данных рисунка 8 найдите отрезки AC и BD.

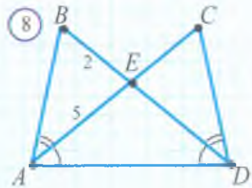












К титульному листу главы II на странице 51

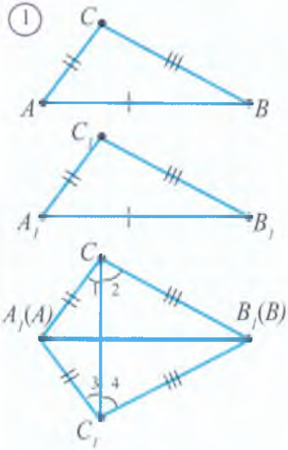
1. Покажите примеры ломаных и многогранников на рисунках.
2. Покажите примеры видов треугольников.
3. Покажите примеры элементов треугольников.
4. Найдите и покажите равные треугольники.

27 ТРЕТИЙ ПРИЗНАК (ССС – СТОРОНА-СТОРОНА-СТОРОНА) РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Познакомимся теперь с признаком равенства треугольников по трем сторонам. В дальнейшем мы будем называть его “признак ССС”.

(Признак ССС равенства треугольников). **Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то эти треугольники равны.**

①



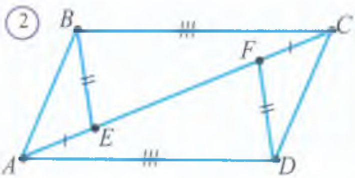
Дано: ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$; $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$. ⇨ $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$

Доказательство. Пусть AB – наибольшая сторона треугольника ABC. Приложим треугольник ABC к треугольнику $A_1B_1C_1$ так чтобы сторона AB совместилась со стороной A_1B_1 и вершины C и C_1 лежали по разные стороны от прямой A_1B_1. Тогда, в силу условия $AC = A_1C_1$ и $BC = B_1C_1$, треугольники A_1C_1C и B_1C_1C будут равнобедренными. По свойствам равнобедренных треугольников, будут выполняться равенства $\angle 1=\angle 3$ и $\angle 2=\angle 4$. Поэтому $\angle A_1CB_1 = \angle A_1C_1B_1$.

Итак, в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$: $AC=A_1C_1$, $BC = B_1C_1$ и $\angle A_1CB_1=\angle A_1C_1B_1$. По признаку СУС равенства треугольников $\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$. ***Теорема доказана.***

Вывод. **Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то их соответствующие углы также равны.**

②



Задача. Используя данные на рисунке 2, докажите, что а) $\Delta AFD=\Delta CEB$; б) $\Delta AEB=\Delta CFD$.

Доказательство: По данным рисунка 2 имеем: $AE=FC$, $BE=FD$ и $AD=BC$.

Так как а) $AF=AE+EF$, то $EC=EF+$ $+FC=EF+AE=AF$.

Тогда в ΔAFD и ΔCEB соответствующие стороны равны и $\angle AFD=\angle CEB$ по признаку ССС равенства треугольников.

б) так как $\Delta AFD = \Delta CEB$, то $\angle BEF = \angle EFD$. Тогда $\angle AEB = \angle CFD$ как смежные с равными углами.

Итак, в треугольниках AEB и CFD:

1. $AE = FC$; 2. $BE = FD$; 3. $\angle AEB = \angle CFD$.

Тогда $\Delta AEB = \Delta CFD$ по признаку СУС равенства треугольников.

Вопросы, задачи и задания

1. Какие элементы треугольников сравниваются в условии признака ССС равенства треугольников?

2. Сформулируйте признак ССС равенства треугольников.

3. По данным на рисунке 3 докажите, что $\Delta ABC = \Delta CDA$.

4. На рисунке 4: а) $\Delta ABC = \Delta ABD$; б) $\Delta BOC = \Delta BOD$; в) $\Delta AOC = \Delta AOD$. Докажите, что $AB \perp CD$.

5. Пусть ΔABC и ΔABD – равнобедренные треугольники с основанием AB. Докажите, что $\Delta ACD = \Delta BCD$.

6. Найдите все пары равных треугольников с вершинами в точках A, B, C, M и N, если на рисунке 5: $BA = AM$, $AC = AN$, $\angle BAC = \angle NAM$.

7. Покажите, что $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$, если $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$ и периметры треугольников равны.

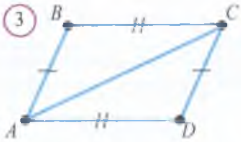
8.* Отрезки AB и CD точкой пересечения делятся пополам. Докажите, что $\Delta ACD = \Delta BDC$.

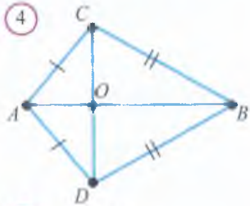
9. Определите, сколько пар равных треугольников имеется на рисунке 6.

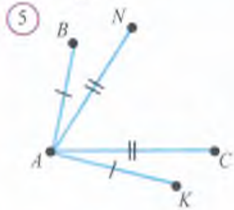
10* Покажите, что на рисунке 7 выполняется равенство: $\Delta ABD = \Delta DCA$, если: а) $\angle 1 = \angle 2$, $AC = BD$; б) $\angle 1 = \angle 2$, $BO = OC$, $AB = CD$.

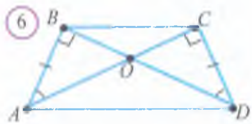
11* Две стороны и один из углов одного треугольника соответственно равны двум сторонам и одному из углов другого треугольника. Будут ли эти треугольники равны?

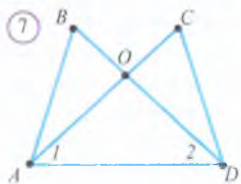
12* Начертите два треугольника, у которых две стороны и один из углов одного соответственно равны двум сторонам и одному из углов другого треугольника, но сами треугольники не равны.





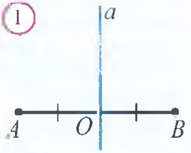






28 СВОЙСТВА СЕРЕДИННОГО ПЕРПЕНДИКУЛЯРА К ОТРЕЗКУ

1



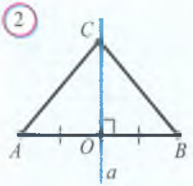
Научимся применять признаки равенства треугольников при доказательстве теорем.

Пусть дан отрезок AB. Через точку O – середину этого отрезка проведем прямую a, перпендикулярную к отрезку AB (рис. 1). Эта прямая называется ***серединным перпендикуляром*** к отрезку AB

Каждая точка серединного перпендикуляра к отрезку находится на равных расстояниях от концов этого отрезка.

Отрезок AB, C – точка серединного перпендикуляра к отрезку AB *(рис. 2)*. ⇒ $AC = BC$

2



Доказательство.

В треугольниках (*рис. 2*) ΔACO и ΔBCO:

1. OC – общая сторона;
2. $AO=BO$ по условию;
3. $\angle AOC = \angle BOC = 90°$ по условию.

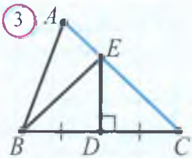
Значит, по признаку СУС равенства треугольников

$$\Delta AOC = \Delta BOC.$$

В частности, $AC=BC$. ***Теорема доказана.***

Задача. Серединный перпендикуляр к стороне BC треугольника ABC пересекает сторону AC в точке E. Найдите отрезки AE и CE, если $BE=6$ *см*, AC=8,4 *см*.

3

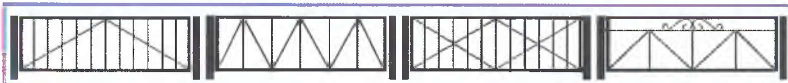


Решение: По свойству серединного перпендикуляра $CE = BE = 6$ *см (рис. 3)*.

Так как $AE+EC=AC$,

то $AE=AC-EC=8{,}4-6=2{,}4$ (*см*).

Ответ: $AE = 2{,}4$ *см*, $CE = 6$ *см*.



Покажите на рисунках металлических решеток отрезки, имеющие серединные перпендикуляры. Какое свойство серединного перпендикуляра использовали при изготовлении этих решеток? Приведите примеры серединного перпендикуляра в окружающем вас мире или в быту.

Укажите на рисунке взаимно перпендикулярные и не перпендикулярные элементы.

Вопросы, задачи и задания

1. Что такое серединный перпендикуляр к отрезку?
2. Сформулируйте свойство серединного перпендикуляра.
3. Начертите треугольник и проведите серединный перпендикуляр к каждой из его сторон. Что вы заметили? Сравните свой чертеж с чертежом одноклассника и замеченное свойство выразите в виде предположения.
4. В каком треугольнике серединный перпендикуляр, проведенный к стороне треугольника, совпадет с высотой, проведенной к этой стороне?
5. К стороне BC треугольника ABC проведен серединный перпендикуляр, который пересекает сторону AC в точке D. Чему равна длина AC, если $BD = 7{,}2$ *см*, $AD = 3{,}2$ *см*?
6. Равнобедренные треугольники ABC и ABD имеют общее основание AB. Докажите, что прямая CD – серединный перпендикуляр стороны AB.

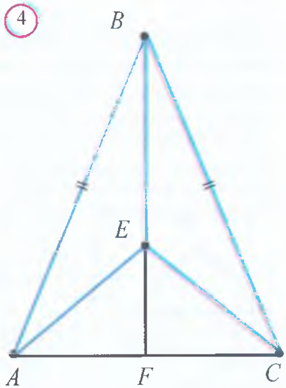
7*. Серединный перпендикуляр к боковой стороне AB равнобедренного треугольника ABC, пересекает сторону BC в точке D. Найдите основание AC, если периметр $\Delta\ ADC$ равен 24 *см* и $AB = 16$ *см*.

8*. Докажите, что серединные перпендикуляры, проведенные к сторонам треугольника, пересекаются в одной точке.

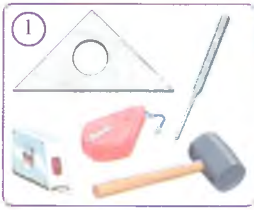
9. На биссектрисе BF, проведенной к основанию равнобедренного ΔABC, взята точка E (рис. 4). Докажите, что $\Delta ABE = \Delta CBE$: а) по признаку ССС; б) не используя его.

10*. Докажите, что серединные перпендикуляры, проведенные к сторонам равностороннего треугольника, делят его на 6 равных треугольников.

4



ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ



1. Практическое занятие:

Построение плана фундамента здания, измерения которого по внешней его стороне равны $5\ м \times 6\ м$ и толщина стен равна 0,5 *м*.

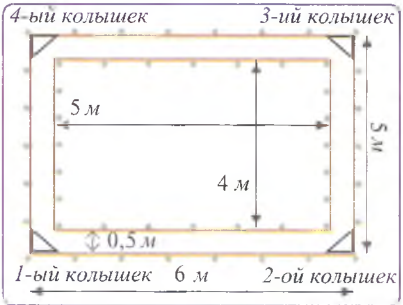
Необходимое оборудование: 8 колышков, верёвка, молоток, рулетка, большой угольник *(рис. 1)*.

1-шаг. Определив где расположена одна из вершин будущего здания забиваем в землю колышек.

2-шаг. Привязываем к колышку веревку и протягиваем ее вдоль длиной стены, отмерив рулеткой 6 *м*, забиваем второй колышек и оборачиваем вокруг него веревку.

3-шаг. С помощью угольника определяем угол 90°, протягиваем веревку в этом направлении на 5 *м* и забиваем третий колышек *(рис. 2)*.

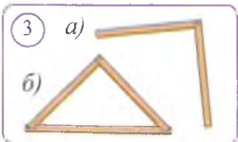
4-шаг. От третьего колышка опять с помощью угольника определяем угол 90° и, протянув веревку в этом направлении на расстояние 6*м*, забиваем четвертый колышек.

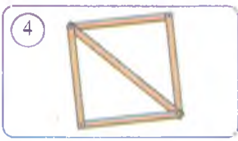


5-шаг. Оборачиваем вокруг него веревку и, протянув ее до первого колышка, привязываем веревку к нему. (Веревка всегда должна находится на внешней стороне колышка).

6-шаг. Отмеряем от сторон углов с вершинами в забитых колышках по 50 *см* и забив 5-, 6-, 7-, 8-колышки, натягиваем на них веревку. Затем вдоль натянутых веревок устанавливаем опалубки и снимаем веревки.

Обоснование того что треугольник «жесткая фигура» с помощью признака ССС равенства треугольников.





Соединим две рейки так, как показано на рисунке 3*а*, с помощью гвоздика. Полученная фигура не будет жесткой, так как, двигая свободные концы реек, мы сможем изменять углы между ними.

Если теперь к свободным концам реек прибить третью рейку так, как показано на рисунке 3*б*, то полученный треугольник будет жестким, потому что нам не удастся сдвинуть или раздвинуть рейки, меняя углы между ними.

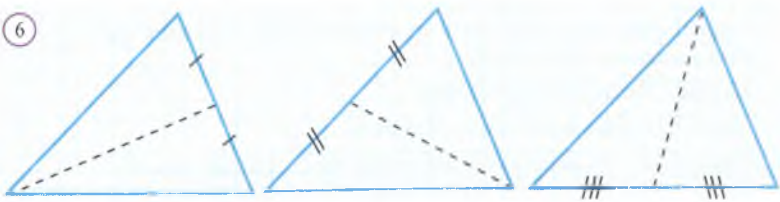
Использование "жесткости" треугольных конструкций при строительстве зданий изображено на рисунке 5.

5

Вопросы, задачи и задания

1. Что вы понимаете под "жесткостью" треугольника?
2. На основании какой теоремы можно утверждать, что треугольник – жесткая фигура?
3. Где используется жесткость треугольника?
4. В чем причина жесткости четырехугольника на рисунке 4?
5. Приведите примеры практического применения жесткости треугольника.
6. Известно, что у треугольников ABC и $A_1C_1B_1$: $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $CA = C_1A_1$, $\angle A=30°$, $\angle B=60°$ и $\angle C_1= 90°$. Найдите остальные углы треугольников ABC и $A_1B_1C_1$.
7. Равнобедренные треугольники ABC и DEF равны. В треугольнике ABC стороны AC и BC равны и AB = 2 *см*. Найдити периметр каждого треугольника, если DE = 4 *см*.
8. Найдите периметр треугольника, полученного в результате соединения середин равностороннего треугольника со стороной 4 *см*.
9. Треугольники MNK и PQR равны между собой. Найдите соответствующие равенства между углами этих треугольников, если MN= 3 *см*, NK= 4 *см*, PQ= 5 *см*.
10. (Практическое упражнение). Три равных треугольника разрежьте по трем различным медианам как показано на рисунке 6. Из полученных 6 треугольников составьте один треугольник.

6



30 ПОВТОРЕНИЕ ГЛАВЫ

1. Заполните пропуски в соответствии со смыслом.

1. Если у треугольника равны две стороны, то он будет ....
2. В равнобедренном треугольнике .... будет также медианой и высотой.
3. Фигура, образованная замкнутой ломаной без самопересечений, называется ....
4. У треугольника, все стороны которого равны, все .... будут равными.
5. У .... треугольника равны все медианы, биссектрисы и высоты.
6. У .... углы, прилежащие к основанию, равны.
7. Равносторонний треугольник будет также и............... треугольником.
8. Точка, лежащая на перпендикуляре, проведенном к середине отрезка, является ………… .

2. Если в следующих фразах имеется ошибка, найдите и исправьте ее.

1. Углы равнобедренного треугольника равны между собой.
2. Если углы двух треугольников соответственно равны, то эти треугольники равны.
3. В равнобедренном треугольнике его медиана будет также биссектрисой и высотой.
4. Биссектрисой треугольника называется луч, исходящий из его вершины и делящий угол пополам.
5. Медиана – это прямая, делящая пополам сторону треугольника.
6. Если у двух треугольников сторона и два угла соответственно равны, то эти треугольники равны.
7. Если две стороны и угол одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу второго треугольника, то эти треугольники равны.
8. Будет ли пересекать одну из боковых сторон равнобедренного треугольника перпендикуляр, проведенный через середину его основания?

3. Запишите в тетрадь соответствующие геометрические понятия, удовлетворяющие свойствам.

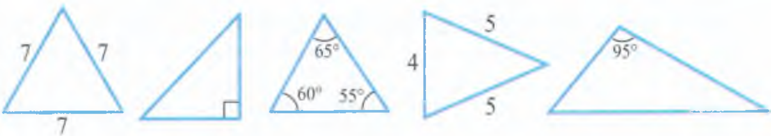
1.	Все медианы равны.
2.	Отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противолежащей стороны.
3.	Перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника на противолежащую сторонуr.
4.	Сумма длин сторон треугольника.
5.	Замкнутая ломаная без самопересечений.
6.	Перпендикулярная прямая, проведенная через середину отрезка.

4. Сопоставьте геометрическому понятию, данному в первом столбце, соответствующее свойство или толкование, взятое из второго столбца.

	Геометрическое понятие	Толкование или свойство
1.	Ломаная	А. Один из углов треугольника прямой
2.	Многоугольник	Б. Соединяет вершину с серединой противоположной стороны
3.	Периметр треугольника	В. Две стороны равны
4.	Остроугольный треугольник	Г. Замкнутая ломаная без самопересечений
5.	Равносторонний треугольник	Д. Состоит из последовательных отрезков A_1A_2, A_2A_3, $\cdots$, $A_{n-1}A_n$, никакие два из которых не лежат на одной прямой
6.	Равноугольный треугольник	Е. Сумма трех сторон треугольника
7.	Медиана треугольника	Ж. Все углы острые
8.	Биссектриса треугольника	З. Часть биссектрисы угла треугольника, лежащая в его внутренней области
9.	Высота треугольника	И. Перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника ни противолежащую ей сторону
10.	Серединный перпендикуляр отрезка	К. Перпендикуляр, проведенный через середину отрезка

5. Упражнения.

1. Определите вид треугольника по данным, приведенным на рисунке.



2. Какие из изображенных ниже пар треугольников равны между собой? По какому признаку?

1)


2)

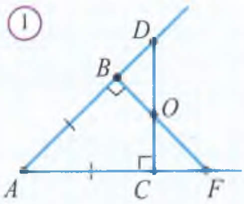

3)

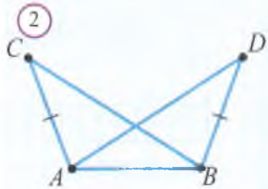

4)

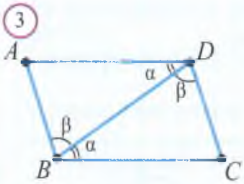

5)

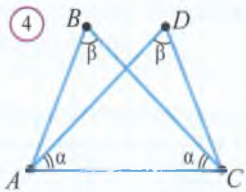

6)

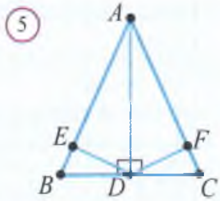

3. Докажите, что на рисунке 1 $\Delta ACD = \Delta ABF$.
4. Покажите, что на рисунке 2 $AD=BC$, если $\angle CAB=\angle ABD$.
5. Докажите, что на рисунке 3 $\Delta ABD = \Delta CDB$.
6. Докажите, что на рисунке 4 $\Delta ABC = \Delta CDA$.
7. Будут ли равны ΔABC и ΔPQR, если $AB=PQ$, $AC=PR$ и $BC=QR$?
8. Если на рисунке 5 $AB = AC$, $BE = CF$, докажите, что а) $\Delta AED = \Delta AFD$; б) $\Delta BED = \Delta CFD$.
9. Докажите, что на рисунке 6 $\Delta ABC = \Delta EFD$.
10. Докажите, что на рисунке 7 $AD = CE$.
11. Найдите x по данным, приведенным на рисунке 8.
12. Отрезки AE и BD пересекаются в точке C. Найдите $\angle CED$, если $DC = DE$, $AB = BC$ и $\angle BAC = 48°$.
13. Внутри треугольника ABC отмечена точка D. Найдите $\angle ADC$, если $AC=AB$, $CD=BD$ и $\angle BDA = 120°$.

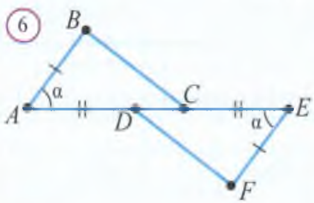


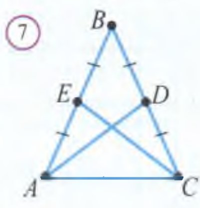


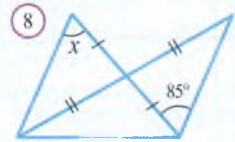










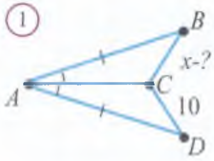


Дополнительное задание для продвинутых учеников

1. Познакомьтесь со страницами главы, соответствующей данной, в электронной версии учебника «Геометрия–7». Проверьте свои знания, выполнив данные задания и решив тесты в интерактивных анимационных приложениях к темам упомянутой главы.

2. Кроме того, найдите приведенные на странице 141 материалы из интернет-ресурсов, относящиеся к упомянутой главе, и изучите их.

31 3-ЬЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА



Контрольная работа состоит из двух частей: в первой части 3 задачи из приведенных ниже (или им подобные задачи), во второй 5 тестов, подобных ниже.

Задачи.

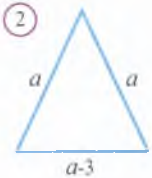
1. Найдите неизвестный отрезок по данным на рисунке 1.
2. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O. Докажите, что $\angle ACO = \angle BDO$, если $\angle CAB = \angle ABD$ и $AO = BO$.
3. Периметр равнобедренного треугольника 18,4 *м*, а основание меньше боковой стороны на 3,6 *м*. Найдите стороны этого треугольника.

4*. Докажите равенство треугольников по двум сторонам и медиане, опущенной на одну из них.

Тесты.

1. Длина двух сторон равнобедренного треугольника равна 8 и 3. Найдите его третью сторону.

   А) 5; Б) 8; В) 11; Г) 9.

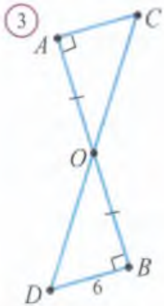


2. $P = 36$, $a = ?$ *(рис. 2)*

   А) 11; Б) 12; В) 13; Г) 18.

3. Периметр равнобедренного треугольника равен 48, боковая сторона 18. Найдите его основание.

   А) 18; Б) 12; В) 16; Г) 18.



4. Периметр равнобедренного треугольника равен 48. Найдите его остальные стороны, если одна из сторон равна 12.

   А) 12; 12; Б) 16; 16; В) 18; 24; Г) 18; 18.

5. Периметр равнобедренного треугольника 36, одна из его сторон равна 16. Найдите остальные стороны.

   А) 16 и 4; Б) 10 и 10; В) 10 и 10 или 16 и 4;
   Г) Такой треугольник не существует.

6. $AC = ?$ *(рис. 3)*

   А) 6; Б) 8; В) 12; Г) 10,5.

7. Сколько медиан у треугольника?

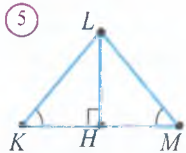
   А) Одна. Б) Две. В) Три. Г) Шесть.

$AC = DF$, $\angle A = F$,
$AB = FE$

8. Какой фигурой является биссектрисе?
А) Отрезком. Б) Лучом.
В) Прямой. Г) Точкой.

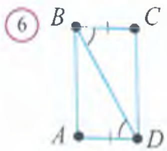
9. Какой из элементов треугольника может лежать вне его?
А) Медиана. Б) Высота.
В) Биссектриса. Г) Диагональ.

10. Как можно назвать предложение: «Если два угла треугольника равны, то он будет равнобедренным»?
А) Определение. Б) Свойство.
В) Признак. Г) Аксиома.

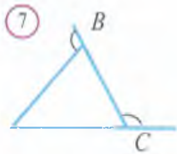


11. Будут ли равны треугольники ABC и DEF, изображённые на рисунке 4?
А) Да. Б) В некоторых случаях.
В) Нет. Г) Никакие.

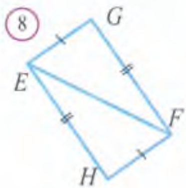
12. Какие из треугольников на рисунке 5 равны между собой?
А) $\Delta KLM = \Delta LMH$; Б) $\Delta KLH = \Delta MLH$;
В) $\Delta KLM = \Delta KLH$; Г) Никакие



13. По какому признаку будут равны треугольники ABD и CDB?
А) По признаку треугольников СУС.
Б) По признаку треугольников УСУ.
В) По признаку треугольников ССС.
Г) Эти треугольники не равны.



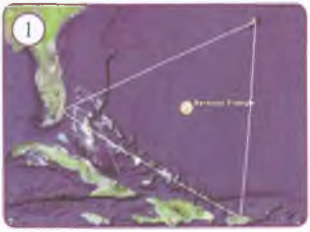
14. Определите вид треугольника, изображенного на рисунке 7.
А) Равносторонний. Б) Равнобедренный.
В) Тупоугольный. Г) Невозможно определить.



15. По рисунку 8 найдите неверность следующих неравенств.
А) $\angle GEF = \angle HFE$; Б) $\angle EGF = \angle FHE$;
В) $\angle EHF = \angle FEG$; Г) $\angle EFH = \angle GEF$.

16. Треугольник с периметром 12 *см* разделен своей высотой на треугольники с периметрами 7 *см* и 9 *см*. Найдите длину высоты треугольника.
А) 2 *см*; Б) 3 *см*; В) 1 *см*; Г) 4 *см*.

Дополнительный материал для развития практической компетенции



1. **Бермудский треугольник.** «Бермудским треугольником» называют треугольную фигуру с концами на островах Атлантического океана Флориде, Бермудских островах и Пуэрто-Рико (*рис. 1*). Он получил свое имя в связи с тайной и бедой. Дело в том, что, в пределах этого пространства таинственным образом терпят крушение и бесследно исчезают корабли и самолеты. Какие еще места имеют геометрические названия?
2. Для чего используют инструмент, изображенный на рисунке 2, который обычно называют «черт»?

К титульному листу главы III на странице 51

1. Из каких геометрических фигур состоит мост на рисунке 1. Почему он создан с помощью таких фигур? Какие виды треугольников составляют мост? Покажите их медианы, высоты и биссектрисы.
2. Скажите, какие геометрические фигуры использованы в изделиях народных ремесленников на рисунках 2-6.
3. Покажите, какие геометрические фигуры использованы в книжном стеллаже на рисунке 7 и в конструкции велосипеда на рисунке 8. Есть ли среди треугольников на рисунках похожие треугольники? А равные треугольники?
4. Что общего оформлении подноса на рисунке 9, детской мозаики на рисунке 10, потолка комнаты на рисунке 11 и расцветке ткани на рисунке 12? Выскажите свои мысли по поводу геометрических фигур на этих рисунках.

3. Занимательная задача по методу доказательства от противного

Вопрос. Султан решил узнать, кто из двух визирей быстрее логически мыслит. Он показал им две белые и две черные шапки. Завязав им глаза, султан надел на них черные шапки, а сам надел белую и спросил: «Отгадайте какого цвета шапки у вас на голове?» Через некоторое время визирь с правой стороны сказал: «У меня на голове черная шапка». Как он догадался?

Ответ: Визирь с правой стороны предположил противоположное:

«Пусть моя шапка не черная. То есть мы считаем, что шапка белая. Тогда визирь с левой стороны увидев, что и у султана также как и у меня белая шапка, сказал бы, что у него черная шапка. Но он молчит. Значит, мое предположение не верно. Шапка на моей голове – черная».

Геометрия в нашей жизни

1. Программа для смартфонов под «iHandy Carpenter», созданная специально для учеников, позволяет определить, стоит ли здание или строение строго вертикально по отношению к земле. Для ее использования достаточно установить программу на телефон и направить телефон на здание или строение. (*Рис. 3*).
2. Для проведения прямых линий в поле используют инструмент «экер». Посмотрев на рисунок 4 можно понять, как им пользоваться.

4. Вычисление окружности головы и длины стопы.

Всем полезно знать длину окружности своей головы и длину стопы, это пригодится при покупке головных уборов и обуви.

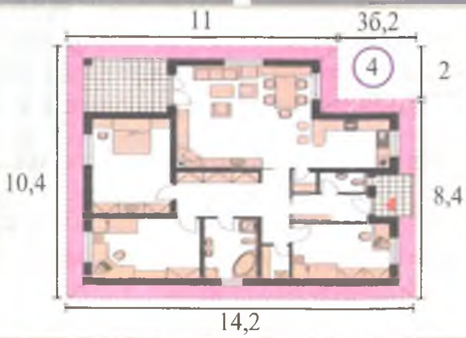
1. При измерении длины окружности головы воспользуемся портняжным метром. Измерим с помощью этой ленты длину окружности головы на расстоянии 3 см над бровями. (*Рис. 5*)
2. Для измерения длины стопы положим линейку на пол, уперев один ее конец в стенку. Нужно стать ровно, прижав пятку к стене. К кончикам пальцев нужно приставить коробку или другой прямоугольный предмет. Размер обуви можно узнать по специальным таблицам размеров по длине стопы. (*Рис. 6*)

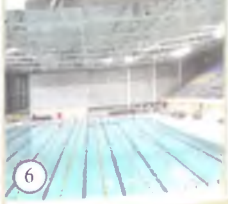
Геометрическое исследование

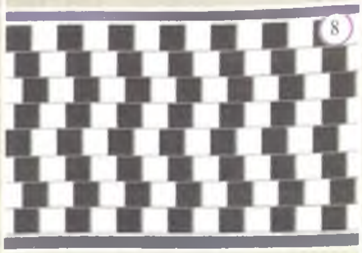
Начертите угол ABC, равный 45°. На стороне BA угла, начиная от вершины последовательно отложите четыре равных друг другу отрезка и через концы этих отрезков проведите параллельные прямые, пересекающие сторону BC. Затем сравните длины полученных на стороне BC отрезков. Какой вывод относительно этих отрезков вы можете сделать? Проверьте результат для углов с другими величинами.

ГЛАВА IV

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ







32 ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПРЯМЫХ

Активизирующее упражнение

Пересекаются ли две прямые, перпендикулярные третьей? Обоснуйте свой ответ.

*Две прямые на плоскости называются **параллельными прямыми**, если они не пересекаются.*

На рисунке 1 изображены параллельные прямые. Параллельность прямых a и b записывается в виде $a \| b$ и читается *"прямая a **параллельна** прямой b"*.

Отрезки (лучи), лежащие на параллельных прямых, называются параллельными отрезками (лучами). Таким образом мы пришли к понятиям параллельности прямой к прямой, луча к лучу, отрезка к отрезку, а также прямой и луча, прямой и отрезка и луча и отрезка. Вы часто встречались в жизни с параллельными отрезками. Например, железнодорожные рельсы, противоположные ребра стола прямоугольной формы, горизонтальные или вертикальные линии на листе из тетради в клетку и т. д.

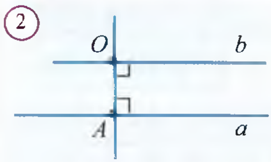
Итак, согласно определению, для того чтобы прямые были параллельны,

– они должны лежать в одной плоскости;

– не должны иметь общей точки, т. е. не пересекаться.

Теорема, доказанная в теме 17, может быть сформулирована так:

Две прямые, перпендикулярные одной прямой, параллельны.



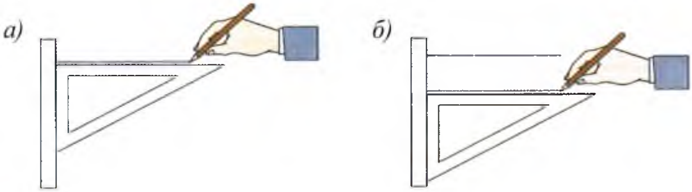
Упражнение. Покажите, что через точку O, не лежащую на прямой a, можно провести параллельную ей прямую.

Решение: Проведем через точку O прямую OA, перпендикулярную прямой a (рис. 2). Затем через точку O проведем прямую b, перпендикулярную прямой OA. В результате, $a \perp OA$ и $OA \perp b$, т. е. имеем две прямые a и b, перпендикулярные прямой OA. Тогда по теореме, приведенной выше, прямые a и b будут параллельны, т. е. прямая b – искомая.

Параллельные прямые на практике можно начертить с помощью простой линейки и угольника как показано на рисунке 3. Обоснуйте правильность этого способа.

Сколько прямых, параллельных данной прямой, можно провести через точку, не лежащую на ней? Следующее утверждение, носящее имя ***аксиомы параллельности***, отвечает на этот вопрос.

3



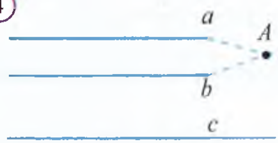
Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной.

Это утверждение принимается без доказательства. Эта аксиома известна как 5 постулат Евклида.

Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны.

a, b и c – прямые, $a||c$, $b||c$. ⇒ $a||b$

4



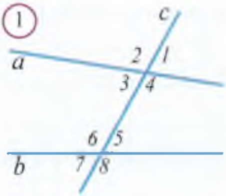
Доказательство. Предположим, что $a||c$ и $b||c$, но a и b не параллельны. Тогда они пересекаются в некоторой точке A *(рис. 4)* и через точку A проходят две прямые a и b, параллельные прямой c. Но это противоречит аксиоме параллельности, значит, наше предположение неверно – прямые a и b параллельны. *Теорема доказана.*

Вопросы, задачи и задания

1. Когда прямые называются параллельными?
2. Сколько прямых, параллельных данной, можно провести через точку, не лежащую на данной прямой?
3. Какие отрезки называются параллельными?
4. Обратите внимание на классную комнату и найдите в ней параллельные отрезки.
5. Покажите, что две прямые, параллельные третьей прямой, параллельны.
6. Начертите прямую и отметьте на ней точки A, B и C. С помощью линейки или угольника через точку A, точку B и точку C проведите прямые, параллельные между собой.
7. Можно ли назвать параллельными два непересекающихся отрезка? А два непересекающихся луча?
8. Какой отрезок будет называться параллельным лучу?
9. Покажите, что противолежащие стороны прямоугольника параллельны?
10. Приведите примеры параллельных из окружающего вас пространства.

33 УГЛЫ, ОБРАЗОВАННЫЕ ДВУМЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПРЯМЫМИ И СЕКУЩЕЙ

Если на плоскости две прямые a и b пересекаются с третьей прямой c, то при этом образуются 8 углов. Обозначим их цифрами как на рисунке 1. Следующие пары этих углов получают отдельные названия:



$\angle 3$ и $\angle 5$, $\angle 4$ и $\angle 6$ — накрест лежащие углы

$\angle 4$ и $\angle 5$, $\angle 3$ и $\angle 6$ — односторонние углы

$\angle 1$ и $\angle 5$, $\angle 2$ и $\angle 6$, $\angle 3$ и $\angle 7$, $\angle 4$ и $\angle 8$ — соответственные углы

$\angle 1$ и $\angle 7$, $\angle 2$ и $\angle 8$ — накрест лежащие углы

$\angle 1$ и $\angle 8$, $\angle 2$ и $\angle 7$ — односторонние углы

Свойство 1. **Если при пересечении двух прямых секущей два накрест лежащих угла одной пары равны, то накрест лежащие углы второй пары также равны.**

параллельные прямые a, b и прямая c – секущая $\angle 1 = \angle 2$ *(рис.2)* ⇨ $\angle 3 = \angle 4$

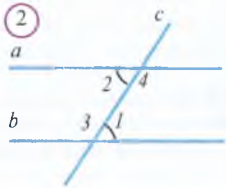
Доказательство. Так как $\angle 2$ и $\angle 4$ – смежные, то $\angle 2 + \angle 4 = 180°$, откуда $\angle 4 = 180° - \angle 2$.

Так как $\angle 1$ и $\angle 3$ также смежные, то $\angle 1 + \angle 3 = 180°$, откуда $\angle 3 = 180° - \angle 1$.

Но по условию $\angle 1 = \angle 2$, поэтому $\angle 3 = 180° - \angle 1 = 180° - \angle 2 = \angle 4$.

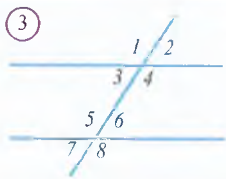
Следовательно, $\angle 3 = \angle 4$.

Свойство доказано.



Свойство 2. **Если соответственные углы равны, то сумма односторонних углов равна 180°.**

Доказательство. Пусть равны углы одной пары соответственных углов: $\angle 2 = \angle 6$ (рис. 3). Докажем, что $\angle 6 + \angle 4 = 180°$. Так как $\angle 2$ и $\angle 4$ – смежные, то $\angle 2 + \angle 4 = 180°$. Учитывая, что по условию $\angle 2 = \angle 6$, находим, что $\angle 6 + \angle 4 = 180°$. Точно так же доказывается, что сумма других односторонних углов также равна 180°. *Свойство доказано.*



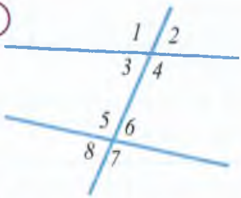
Свойство 3. **Если накрест лежащие углы равны, то соответственные углы также равны.**

Доказательство. Пусть $\angle 3 = \angle 6$ (рис. 3). Так как $\angle 3$ и $\angle 2$ – вертикальные, то $\angle 3 = \angle 2$. Тогда равны соответственные углы: $\angle 6 = \angle 2$. Точно также доказывается равенство соответственных углов других пар. ***Свойство доказано.***

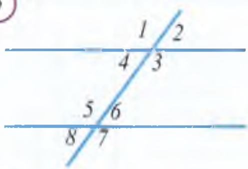
Вопросы, задачи и задания

1. Начертите две произвольные прямые. Проведите их секущую. Укажите односторонние, накрест лежащие и соответственные углы.
2. Укажите на рисунке 4 вертикальные и смежные углы.
3. Пусть на рисунке 4 $\angle 2 = 60°$ и $\angle 7 = 95°$, найдите остальные углы.
4. Пусть на рисунке 5 $\angle 2 = \angle 6 = 63°$, найдите остальные углы.
5. Если $\angle 3 = \angle 5$ на рисунке 5, то будет ли $\angle 4 = \angle 6$? Если $\angle 1 = \angle 7$, выполняются ли равенства $\angle 2 = \angle 8$, $\angle 3 = \angle 5$, $\angle 4 = \angle 6$? Обоснуйте свой ответ.
6. Могут ли быть равными односторонние углы?
7.* Покажите, что если равны накрест лежащие углы, то сумма односторонних углов равна 180°. Верно ли обратное утверждение? То есть, если сумма односторонних углов равна 180°, то равны накрест лежащие углы.
8.* Докажите, что если при пересечении двух прямых секущей равны углы одной пары соответственных углов, то равны также и углы другой пары соответственных углов.
9. Найдите углы $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$, $\angle 4$, $\angle 5$, $\angle 6$ на рисунке 6.

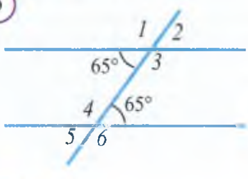
4



5



6

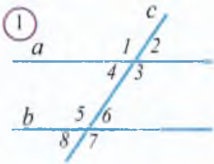


Страница истории

Египетский царь Птолемей I, правящий в третьем веке до нашей эры, захотел получить уроки геометрии у Евклида. Промучившись несколько занятий царь спросил своего учителя: «Ты можешь указать мне простой путь»? На что Евклид ответил «О великий царь, в геометрии нет царских дорог».

34 ПРИЗНАКИ ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ ДВУХ ПРЯМЫХ

Активизирующее упражнение

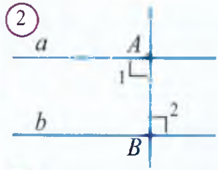


На рисунке 1 изображены параллельные прямые a, b и секущая c. Выполните следующие задания и ответьте на вопросы.

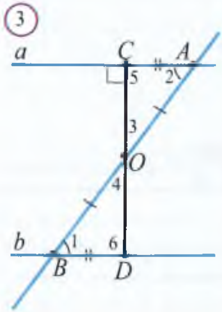
1. Выпишите все пары накрест лежащих углов и измерьте их транспортиром. Что вы можетс сказать о градусной мере каждой пары этих углов?
2. Выпишите все пары односторонних углов и измерьте их транспортиром. Что вы можете сказать о градусной мере каждой пары этих углов?
3. Выпишите все пары соответственных углов и измерьте их транспортиром. Что вы можете сказать о градусной мере каждой пары этих углов?

Каким способом можно установить параллельность двух прямых? Следующие две теоремы, называемые признаками параллельности прямых, дают ответ на этот вопрос.

Если при пересечении двух прямых секущей равны накрест лежащие углы, то эти две прямые параллельны.



Доказательство. 1) Вначале рассмотрим случай, когда $\angle 1$ и $\angle 2$ являются прямыми (рис. 2). В этом случае прямая AB будет перпендикулярна прямым a и b. Тогда по теореме о двух прямых, перпендикулярных одной прямой, прямые a и b будут параллельны (см. с. 78).



2) Рассмотрим теперь случай, когда $\angle 1$ и $\angle 2$ не являются прямыми: через точку O – середину отрезка AB (AO=BO) опустим на прямую а перпендикуляр OC *(рис. 3)*. На прямой b отложим от точки B отрезок BD, равный отрезку AC. Рассмотрим треугольники AOC и BOD.

У этих треугольников:

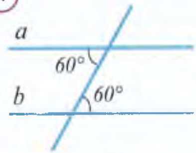
1. по построению: AC=BD;
2. по построению: AO=BO;
3. по условию: $\angle 1 = \angle 2$.

Тогда по признаку СУС равенства треугольников $\angle AOC = \angle BOD$. В частности, $\angle 5 = \angle 6$.

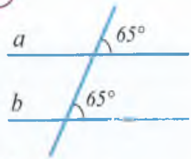
Так как $\angle 5 = \angle 6$, то $\angle 6$ также является прямым, как и $\angle 5$. Таким образом, прямые a и b перпендикулярны одной и той же прямой CD. Следовательно, они параллельны.

Теорема доказана.

4



5

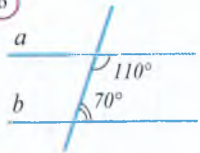


Задача. Будут ли прямые a и b на рисунке 1 параллельны, если $\angle 2=55°$ и $\angle 5=125°$?

Решение: $\angle 2$ и $\angle 4$ – вертикальные, поэтому $\angle 4=\angle 2=55°$. $\angle 5$ и $\angle 6$ – смежные, значит, $\angle 6=180°-\angle 5=180°-125°=55°$. В результате получаем, что накрест лежащие углы равны: $\angle 4=\angle 6$. Следовательно, по доказанному выше признаку параллельности прямые a и b параллельны.

Ответ: Да.

6



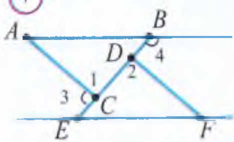
Вопросы, задачи и задания

1. Сформулируйте признак параллельности двух прямых.
2. Докажите теорему самостоятельно.
3. Сделайте выводы из доказательства теоремы.
4. Покажите, что $a \| b$ на рисунке 4.
5. Покажите, что $a \| b$ на рисунке 5.
6. Покажите, что $a \| b$ на рисунке 6.
7. Пусть на рисунке 1: а) $\angle 1=132°$, $\angle 8=48°$ б) $\angle 2=36°$, $\angle 5=144°$ в) $\angle 3=103°$, $\angle 6=77°$ г) $\angle 1+\angle 7=180°$. Будет ли $a \| b$?
8. Пусть на рисунке 7: а) $\angle 3=\angle 4$, $BD=CE$, $AB=EF$; б) $\angle 1=\angle 2$, $\angle 3=\angle 4$, $BD=CE$; в) $AB=EF$, $BD=EC$, $AC=FD$. Покажите, что $\Delta ABC=\Delta EFD$.

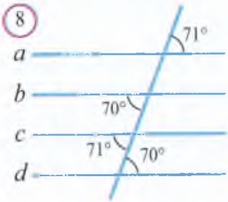
9* Дана прямая a и точка K, не лежащая на ней. Через точку K проведены 4 прямые. Сколько прямых пересекают прямую a.

10. Найдите параллельные прямые на рисунке 8.

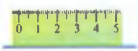
7



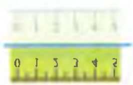
8



Способ определения параллельности друг другу двух ребер линейки:

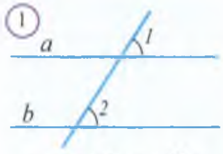


перевернув линейку смотрим:

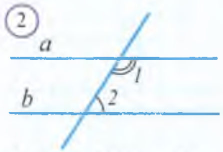


Делаем вывод: *если при переворачивании ребро линейки не совпадет с прямой, то не параллельны.*

35 ПРИЗНАКИ ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ ДВУХ ПРЯМЫХ (ПРОДОЛЖЕНИЕ)



$\angle 1 = \angle 2 \Rightarrow a \| b$



$\angle 1 + \angle 2 = 180° \Rightarrow a \| b$

Свойство, непосредственно следующее из теоремы, называется *следствием*.

Познакомимся со следствиями, исходя из теоремы, доказанной в предыдущей теме.

Пользуясь равенством вертикальных углов приходим к следующему следствию.

Следствие 1. ***Если при пересечении двух прямых секущей, соответственные углы равны, то эти прямые параллельны*** *(рис. 1)*.

Следующее следствие получаем, пользуясь тем, что сумма смежных углов равна 180°.

Следствие 2. ***Если при пересечении двух прямых секущей, сумма односторонних углов равна 180°, то эти прямые параллельны*** *(рис. 2)*.

Эти следствия верны и для внутренних и для внешних соответственных углов.

Задача. Какие из прямых, изображенных на рисунке 3, параллельны?

Решение: Из равенства вертикальных углов следует, что $\angle 1 = 105°$, $\angle 2 = 125°$, $\angle 3 = 115°$. Прямые a и b не параллельны, так как $\angle 1 + 65° = 105° + 65° \neq 180°$.

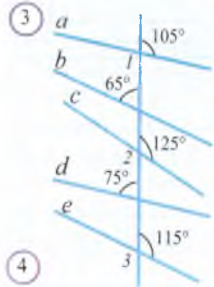
$a \| d$, так как $\angle 1 + 75° = 105° + 75° = 180°$ (см. следствие 2).

Точно так же $b \| e$, так как $65° + \angle 3 = 65° + 115° = 180°$.

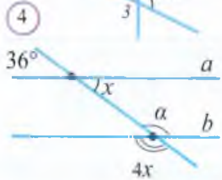
Прямые a, c и e не параллельны, так как их соответственные углы не равны (см. следствие 1).

Точно так же прямые b и d не параллельны, так как не равны соответственные углы: $65° \neq 75°$.

Ответ: $a \| d$, $b \| e$.



Задача. Верно ли, что $a \| b$ на рисунке 4?



Решение: По свойству вертикальных углов $x = 36°$. Отсюда $\alpha = 4x = 4 \cdot 36° = 144°$. Сумма односторонних углов $x + \alpha = 36° + 144° = 180°$. Значит, по следствию 2 $a \| b$.

Ответ: Да.

Смотрите титульный лист главы IV на странице 77.

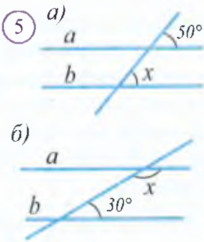
1. Выскажите предположения о преимуществах использования параллельности прямых при построении автомобильных и железных дорог.
2. Укажите параллельные элементы зданий на рисунке.
3. Выделите параллельные элементы здания на рисунке 4. Исходя из размеров отрезков на рисунке, что можно сказать о размерах здания?
4. Параллельны ли прямые на рисунке 8? Как это можно определить?

Обман зрения: Действительно ли фигуры крутятся?

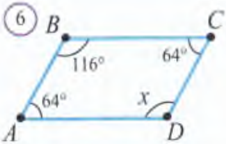
Вопросы, задачи и задания

1. Что такое следствие теоремы?
2. Назовите признаки параллельности двух прямых.
3. Чему должен равняться угол x на рисунке 5*а*, для которого прямые a и b будут параллельны?
4. А на рисунке 5*б*?
5. Найдите неизвестный угол на рисунке 6.
6. Пусть на рисунке 7*а* $\angle 1 = \angle 5 = 105°$. Найдите остальные углы.
7. Пусть на рисунке 7*б* $\angle 3 = 60°$, $\angle 8 = 120°$. Найдите остальные углы.
8. Какие стороны параллельны у четырехугольника на рисунке 8?
9. Один из углов, образующихся при пересечении двух прямых секущей, равен 32°. Будут ли параллельны эти прямые, если соответственный ему угол равен 33°?
10. Покажите, что биссектрисы накрест лежащих углов, получающихся при пересечении двух параллельных прямых a и b секущей c, параллельны *(рис. 9)*.

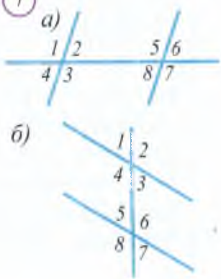
5



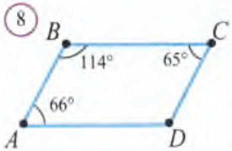
6



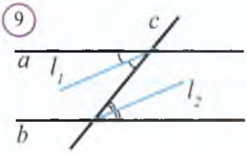
7



8



9



36 ОБРАТНАЯ ТЕОРЕМА

Если поменять местами условие и заключение теоремы, получится новое предложение (иначе, новое утверждение). Если оно также будет правильным, то оно называется *обратной теоремой* по отношению к данной теореме.

Прямая теорема: ***Если*** **верно утверждение A** ***то верно*** **утверждение B**

Коротко: $A \Rightarrow B$

Обратная теорема: ***Если*** **верно утверждение B** ***то верно*** **утверждение A**

Коротко: $B \Rightarrow A$

Пример: "Если треугольник равнобедренный, то углы прилежащие к его основанию, равны", обратная теорема: ***"Если углы, прилежащие к одной из сторон треугольника, равны, то треугольник равнобедренный".***

— это утверждение также верно, следовательно, эта теорема обратна по отношению к вышеприведенной.

Конечно не обязательно и прямую теорему, и теорему, обратную к ней записывать именно в таком виде, они часто формулируются более независимо. В частности, обратную теорему, приведенную в примере коротко можно сформулировать так:

"Если два угла треугольника равны, то треугольник равнобедренный."

Упражнение 1. Обратная теорема, данная выше рассматривается как "признак равнобедренного треугольника". Докажите самостоятельно, что она верна.

Однако надо заметить, что утверждение, сформулированное как обратное к прямой теореме, не всегда будет верно.

Например, утверждение "Если углы равны, то они вертикальные", обратное к теореме "Если углы вертикальные, то они равны", является неверным.

Упражнение 2.

1. Составьте утверждение, обратное к предложению "Если идет дождь, то на небе тучи". Выясните, всегда ли верно это обратное утверждение.
2. Сформулируйте теоремы, обратные к приведенным ниже. Проверьте, будет ли верным утверждение, составляющее его содержание.
   1) Два перпендикуляра к одной прямой не пересекаются.
   2) Если два треугольника равны, то равны и их соответствующие стороны.
   3) Если смежные углы равны, то они прямые.
   4) Две прямые параллельные порознь третьей, параллельны.

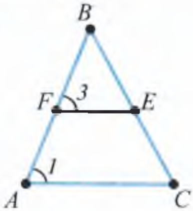
Вопросы, задачи и задания

1. В чем разница между прямой и обратной теоремами?
2. Какая существует связь между прямой и обратной теоремами?
3. Будет ли всегда верна теорема, обратная к верной теореме?
4. Можно ли, доказав прямую теорему, принять обратную к ней без доказательства?
5. Как называется теорема, обратная к обратной теореме?
6. Запишите условие и заключение следующих теорем. Сформулируйте теоремы, обратные к ним и проверьте, будут ли они верны:
   1) Если $AC = BD$ на рисунке 2, то $AB = CD$.
   2) Если $\angle 1 = \angle 2$ на рисунке 3, то $\angle 3 = \angle 4$.
   3) Если $EF \| AC$ на рисунке 4, то $\angle 1 = \angle 3$.
   4) Если $AO = OB$ и $CO = OD$ на рисунке 4, то $\Delta AOD = \Delta BOC$.
7. Через блоки, прикрепленные в точках A и B перекинута нить с подвешенными на них грузами P_1 и P_2 *(рис.6)*. Груз P_3, подвешенный на нити в точке C, уравновешивает грузы P_1 и P_2. Докажите, что $\angle ACB = \angle A + \angle B$, если известно, что $AP_1 \| BP_2 \| CP_3$.
8. Сформулируйте теоремы, обратные к приведенным ниже, и проверьте их правильность:
   1) Если при пересечении двух прямых секущей, соответственные углы, образовавшиеся при этом, равны, то эти прямые параллельны.
   2) Две прямые, каждая из которых параллельна третьей прямой, параллельны.
   3) В равностороннем треугольнике все углы равны.
9. Сформулируйте теоремы, обратные к признакам равенства треугольников. Верны ли эти обратные теоремы?
10. Докажите следующее утверждение: Если биссектриса, опущенная из одной из вершин треугольника является также его высотой, то этот треугольник равнобедренный. Сформулируйте теорему, обратную этой.

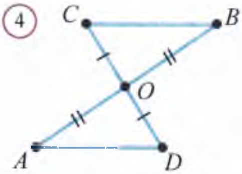
1

2

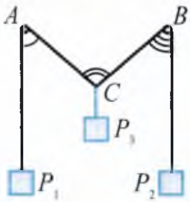
3



4



5



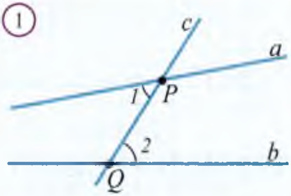
37 УГЛЫ, ОБРАЗОВАННЫЕ ДВУМЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПРЯМЫМИ И СЕКУЩЕЙ

Ниже мы остановимся на теоремах, обратных признакам параллельности.

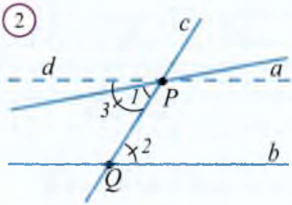
Теорема 1. **Накрест лежащие углы, образованные при пересечении двух параллельных прямых секущей, равны.**

$a \parallel b$, c – секущая (*рис. 1*) ⇒ $\angle 1 = \angle 2$

1



2



Доказательство. Предположим противное: пусть $\angle 1 \neq \angle 2$. Отложим от луча AB угол CAB, равный $\angle 2$ ($\angle CAB = \angle 2$). В таком случае, при пересечении прямых CA и b с прямой AB, получим равные (по построению) накрест лежащие углы $\angle CAB$ и $\angle 2$.

Значит, прямые CA и b параллельны. Таким образом, через точку A, не лежащую на прямой b, проходят две прямые (CA и a), параллельные прямой b.

Но это противоречит аксиоме параллельности. Значит, наше предположение неверно и $\angle 1 = \angle 2$.

Теорема доказана.

Следствие. **Если прямая перпендикулярна к одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и ко второй прямой.**

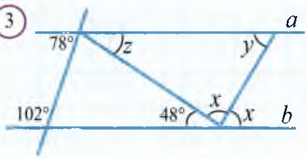
Теорема 2. **Соответственные углы, образованные при пересечении двух параллельных прямых секущей, равны.**

Теорема 3. **Сумма односторонних углов, образованных при пересечении двух параллельных прямых секущей, равна 180°.**

Попробуйте доказать эти теоремы самостоятельно.

Задача. Найдите неизвестные углы на рисунке 3.

3



Решение: Так как сумма односторонних углов $78° + 102° = 180°$, то $a \parallel b$. Значит, по теореме 1 угол $z = 48°$ и $x = y$. Но $x + x + 48° = 180°$ (как смежные), откуда угол $x = 66°$. Тогда и угол $y = 66°$.

Ответ: $x = 66°$; $y = 66°$; $z = 48°$.

Вопросы задачи и задания

1. Покажите, что $AC=CB$ на рисунке 4.
2. Как можно применить задачу 1 при нахождении середины данного отрезка?
3. Известно, что $BC \| AD$, $AO=OD$ на рисунке 5. Докажите равенства а) $BO=OC$; б) $AC=$ $=BD$; в) $\Delta AOB=\Delta COD$; г) $\Delta ABD=\Delta ACD$.
4. Если $BC \| AD$ и $AB \| CD$ на рисунке 6, то $\Delta ABD=\Delta CBD$.
5. Если $a \| b$ на рисунке 7, то чему равен x.

6* Даны острые углы ABC и $A_1B_1C_1$. Докажите, что $\angle ABD=\angle CBD$, если $AB \| A_1B_1$ и $BC \| B_1C_1$.

7* Один из углов, образованных прямыми, параллельными сторонам этого угла, острый, а другой тупой. Докажите, что сумма этих углов равна 180°.

Напоминание. Теоремы, приведенные в вопросах 6-7 – являются свойствами углов с соответственно параллельными сторонами.

8. Найдите $\angle 2$ и $\angle 3$, если на рисунке 8 $a \| b$, $c \| d$ и $\angle 1=55°$.
9. Разность углов, стороны которых лежат на соответственно параллельных прямых, равна 40°. Найдите эти углы.

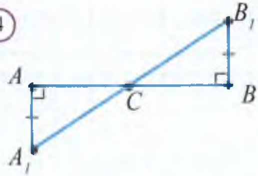
10* Даны острые углы ABC и $A_1B_1C_1$. Докажите, что $\angle ABC=\angle A_1B_1C_1$, если $AB \perp A_1B_1$ и $BC \perp B_1C_1$.

11* Один из углов, стороны которых лежат на соответственно перпендикулярных прямых, острый, а второй тупой. Докажите, что сумма этих углов равна 180°.

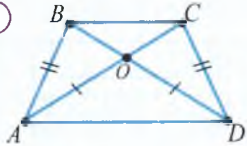
Напоминание. Теоремы, приведенные в задачах 10–11 – это свойства углов с соответственно перпендикулярными сторонами.

12. Углы A и C на рисунке 9 прямые. Угол D в два раза больше угла B. Найдите эти два угла.

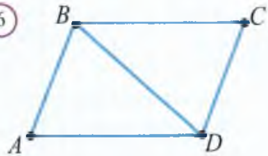
4



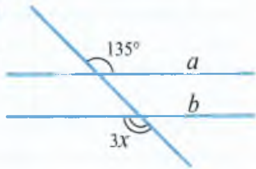
5



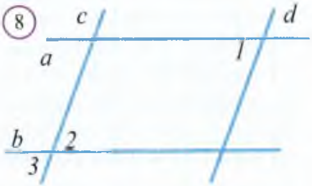
6



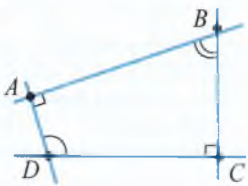
7



8



9



38 РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

1. *Задача.* $a \nparallel b$, $c \parallel d$ на рисунке 1. Какое из следующих равенств верно?

1) $\angle 1 = \angle 15$; 2) $\angle 3 = \angle 13$; 3) $\angle 4 = \angle 16$; 4) $\angle 4 = \angle 8$;
5) $\angle 1 = \angle 12$; 6) $\angle 7 = \angle 10$; 7) $\angle 8 = \angle 16$; 8) $\angle 8 = \angle 11$;
9) $\angle 4 + \angle 13 = 180°$; 10) $\angle 6 + \angle 14 = 180°$;
11) $\angle 7 + \angle 12 = 180°$; 12) $\angle 8 + \angle 9 = 180°$.

Решение: 3) $\angle 4 = \angle 2$ (*как вертикальные*), $\angle 2$ и $\angle 16$ – соответственные, тогда $\angle 2 = \angle 16$. Значит, равенство, $\angle 4 = \angle 16$ верно.

5) $\angle 12 = \angle 7$ (*по свойству соответственных углов*) и $\angle 7 = \angle 5$ (*как вертикальные углы*). $\angle 5$ и $\angle 1$ соответственные. $a \nparallel b$, поэтому $\angle 1 \neq \angle 5 = \angle 7 = \angle 12$, то есть равенство $\angle 1 = \angle 12$ не верно.

9) $\angle 4 = \angle 2$, $\angle 13 = \angle 15$ (*как вертикальные*), $c \parallel d$, так как $\angle 2$ и $\angle 15$ – односторонние, то $\angle 2 + \angle 15 = 180°$. Значит, равенство, $\angle 4 + \angle 13 = 180°$ верно.

11) Так как $c \parallel d$, то $\angle 7 = \angle 10$ (*как накрест лежащие углы при параллельных*) и $\angle 10 = \angle 12$ (*как вертикальные*). Значит, $\angle 7 = \angle 12$.

Поэтому равенство $\angle 7 + \angle 12 = 180°$ верно только при $\angle 7 = \angle 12 = 90°$.

Подобным же образом самостоятельно проверьте остальные равенства.

2. Заданы прямая AB и не лежащая на ней точка C. Сколько прямых параллельных этой прямой можно провести через точку C?

3. Найдите углы треугольника ABC на рисунке 2, если $EF \parallel AC$, $\angle BEF = 62°$, $\angle EFC = 130°$.

4. Найдите углы x и y на рисунке 3, если $a \parallel b \parallel c$ и $d \parallel l$.

5. Заданы прямая AB и не лежащая на ней точка C. Сколько прямых параллельных этой прямой можно провести через точку C?

6. От вершины луча a отложены лучи b и c так, что $\angle(аб) = 25°$ и $\angle(ав) = 155°$. Можно ли сказать, что лучи b и c параллельны?

7. Прямые AC и BD параллельны, при этом точки A и D лежат по разные стороны от секущей BC. Докажите следующее:

а) углы DBC и ACB – внутренние накрест лежащие углы;

б) луч C проходит между сторонами угла ABD;

в) углы CAB и DBA являются внутренними односторонними углами.

8. Отрезки AB и CD пересекаются в точке E и делятся ею пополам. Докажите, что прямые AC и BD параллельны.

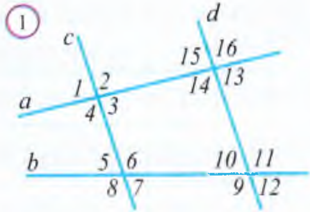
9. Угол ABC равен 80°, а угол BCD равен 120°. Могут ли быть параллельными прямые AB и CD? Обоснуйте ответ.

10. Один из углов, полученных при пересечении двух параллельных прямых секущей, равен 40°. Может ли один из семи оставшихся углов равняться 120°?

11. Разность двух внутренних односторонних углов, полученных при пересечении двух параллельных прямых секущей, равна 20°. Найдите эти углы.

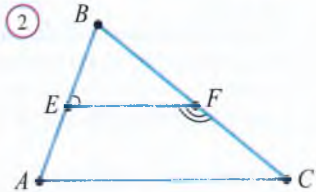
12. Сумма двух внутренних односторонних углов, полученных при пересечении двух параллельных прямых секущей, равна 150°. Найдите эти углы.

13. Один из углов, полученных при пересечении двух параллельных прямых секущей, равен 72. Найдите оставшисся углы.



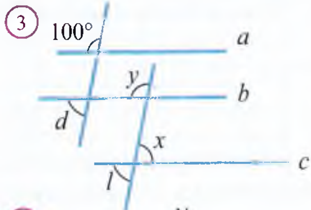
14. Треугольники ABC и BAD равны. Точки C и D лежат по разные стороны от прямой AB. Докажите, что прямые параллельны.

15. Докажите, что биссектрисы внутренних накрест лежащих углов, полученных при перссечении двух параллельных прямых секущей, параллельны.



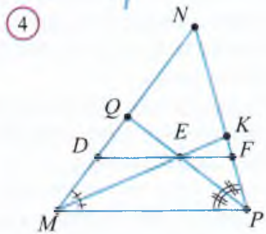
16. В равнобедренном трсугольнике ABC $AB=BC$. Через вершину B проведена прямая DE параллельная прямой AC. Точка B лежит между точками D и E. Отрезок DC пересекает отрезок AB. Докажите, что $\angle ABD=\angle CBE$.

17. Докажите, что прямые параллельные перпендикулярным прямым, перпендикулярны.



18. На продолжении медианы BD треугольника ABC за точку D отложили равный медиане отрезок DE. Через точку C провели прямую p параллельную AB. Докажите, что прямая p пройдет через точку E.

19. На продолжении медианы BD треугольника ABC отложили равный медиане отрезок DE. На продолжении медианы AF отложили равный ей отрезок FH. Докажите, что точки B, H, E лежат на одной прямой.



20. Начертите произвольный треугольник ABC и внутри него отметьте точку A_1. Постройте треугольник $A_1B_1C_1$ равный данному треугольнику и, стороны которого соответственно параллельны его сторонам (рассмотрите один из возможных случаев).

39 ПОВТОРЕНИЕ ГЛАВЫ

1. Заполните пропуски в соответствии со смыслом.

1. Через точку, лежащую на прямой, можно провести перпендикулярную к ней ....
2. Если при пересечении двух прямых секущей равны .... , то эти прямые параллельны.
3. Если на плоскости две прямые .... , то они называются параллельными прямыми.
4. Прямая, пересекающая одну из двух параллельных прямых, ...
5. Через точку, не лежащую на прямой, проходит .... параллельная ей прямая.
6. Через произвольную точку прямой можно провести только одну прямую, ...
7. Прямые, пересекающиеся под прямым углом называются ....
8. Две прямые, ... одной и той же прямой, параллельны.
9. Если при пересечении двух прямых секущей односторонние углы .... , то прямые параллельны.

2. Если в следующих фразах имеются ошибки, найдите и исправьте их.

1. Только через одну точку прямой можно провести к ней перпендикуляр.
2. Только из одной точки, не лежащей на данной прямой, можно опустить перпендикуляр на данную прямую.
3. Прямая, перпендикулярная к одной из параллельных прямых AB и AK, будет перпендикулярна и к другой.
4. Накрест лежащие углы, которые образуются при пересечении двух прямых секущей, равны.
5. Если два отрезка не пересекаются, они называются параллельными.
6. Углы с соответственно параллельными сторонами равны.
7. Если $a \perp b$, $b \perp c$, то $a \perp c$.
8. Сумма углов с соответственно перпендикулярными сторонами равна 180°.
9. Если равны односторонние углы, образующиеся при пересечении двух прямых секущей, то прямые параллельны.
10. Прямые, параллельные перпендикулярным прямым, параллельны.

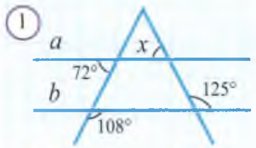
3. Найдите соответствующие геометрические понятия для свойств или толкований, приведенных в таблице.

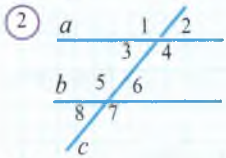
1.	Прямые, не имеющие общей точки	
2.	Пересекаются под прямым углом	
3.	Из точки на прямую можно опустить только один	

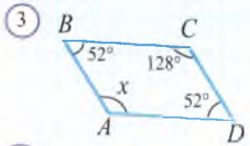
4.	Из точки на прямую можно опустить сколько угодно	
5.	Условие и заключение поменяли местами	
6.	Углы, получающиеся при пересечении двух прямых секущей	

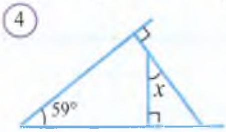
4. Сопоставьте геометрическому понятию, данному в первом столбце, соответствующее свойство или толкование из второго столбца.

Геометрическое понятие	*Свойство, толкование*
1. Параллельные прямые 2. Перпендикулярные прямые 3. При пересечении двух прямых секущей 4. Накрест лежащие углы 5. Обратная теорема	А. Верна не всегда. Б. Не пересекаются. В. Образуют при пересечении прямой угол. Г. Получаются накрест лежащие, соответственные и односторонние углы. Д. Если они равны, то прямые параллельны.









5. Задачи.

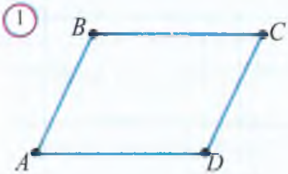
1. Найдите x на рисунке 1.
2. Будет ли $a \| b$ на рисунке 2, если $\angle 4 + \angle 5 = 180°$?
3. Будет ли $a \| b$ на рисунке 2, если $\angle 2 = \angle 6$?
4. Найдите остальные углы на рисунке 2, если $\angle 1 = \angle 5 = 118°$.
5. Будет ли $a \| b$ на рисунке 2, если $\angle 2 = 71°$ и $\angle 7 = 119°$?
6. Найдите неизвестный угол на рисунке 3.
7. Один из углов, полученных при пересечении двух прямых секущей равен 47°. При каком значении соответственного ему угла прямые будут параллельны?
8. Сумма двух внутренних накрест лежащих углов, полученных при пересечении двух параллельных прямых секущей равна 84°. Найдите остальные углы.
9. Один из углов, полученных при пересечении двух параллельных прямых секущей, в 8 раз больше другого. Найдите все получившиеся углы.
10. Разность двух односторонних углов, полученных при пересечении двух параллельных прямых секущей, равна 30°. Найдите эти углы.
11. Найдите неизвестный угол на рисунке 4.
12. Разность углов с соответственно параллельными сторонами равна 36°. Найдите эти углы.

40 4-АЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

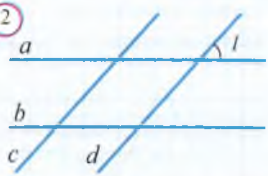
Контрольная работа состоит из двух частей: в первой части 3 задачи из приведенных ниже (или им подобные задачи), во второй 5 тестов, подобных ниже.

1. При пересечении двух параллельных прямых секущей, один из получившихся углов равен 34°. Найдите остальные углы.
2. Докажите, что $AB=CD$, если $BC||AD$ и $AB||CD$ на рисунке 1.
3. Пусть $a||b$, $c||d$ и $\angle 1=48°$ на рисунке 2. Найдите остальные углы.
4. В ΔABC проведена биссектриса AD. Прямая, проведенная через точку D, пересекает сторону AC в точке E. Докажите, что если $AE=DE$, то $DE||AB$.

1



2



Тесты.

1. Сколько прямых, параллельных данной прямой, можно провести через точку, не принадлежащую ей?

   А) 1; Б) 2; В) 4; Г) сколько угодно.

2. Какой из ответов правильный, если $a||b$, $b\perp c$, $c\perp d$?

   А) $a\perp d$, $b\perp d$; Б) $a\perp c$, $b||d$;
   В) $a||c$, $a\perp d$; Г) $a\perp c$, $a\perp d$, $b\perp d$.

3. Сколько перпендикуляров можно опустить на прямую лежащую в плоскости, из точки, не принадлежащей прямой?

   А) 1; Б) 2; В) 4; Г) сколько угодно.

4. Найдите угол x, если $a||b$ на рисунке 3.

   А) 100°; Б) 110°; В) 130°; Г) 140°.

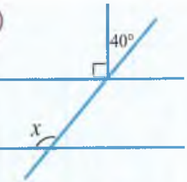
5. Найдите угол x, если $a||b$ на рисунке 4.

А) 30°; Б) 45°; В) 60°; Г) 36°.

6. Найдите угол x (рис. 3).

А) 96°; Б) 108°; В) 112°; Г) 78°.

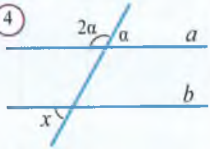
3



7. Найдите угол α, если $a \| b$ и $\alpha - \beta = 70°$ на рисунке 6.

А) 30°; Б) 125°; В) 75°; Г) 36°.

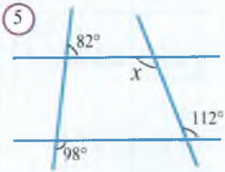
4



8. Сколько равных тупых углов могут получиться при пересечении двух прямых третьей?

А) 3; Б) 8; В) 6; Г) 4.

5



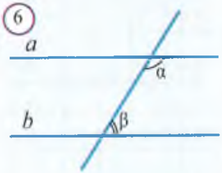
9. При пересечении двух параллельных прямых секущей, один из получившихся углов равен 97°. Найдите наименьший из получившихся углов.

А) 97°; Б) 83°; В) 77°; Г) 7°.

10. Найдите наибольшее число равных острых углов, полученных при пересечении двух прямых третьей?

А) 3; Б) 4; В) 6; Г) 5.

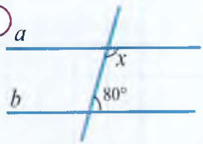
6



11. Найдите наибольшее число прямых углов, полученных при перссечении двух прямых третьей?

А) 2; Б) 6; В) 8; Г) 5.

7

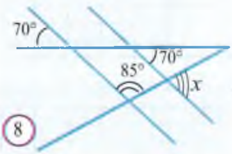


12. Сумма трех внутренних углов, полученных при пересечении двух параллельных прямых секущей, равна 290°. Найдите четвертый угол.

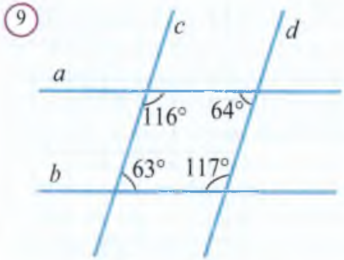
А) 145°; | Б) 110°; | В) 36°; | Г) 70°.

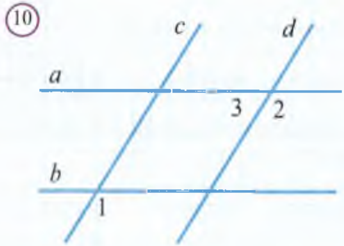
13. Найдите угол x, если $a \| b$ на рисунке 7.

А) 100°; | Б) 80°; | В) 110°; | Г) 90°.



8





14. Найдите угол x на рисунке 8.
   А) 105°; Б) 95°; В) 85°; Г) 75°.

15. Какие из прямых на рисунке 9 параллельны?
   А) $a||b$; Б) $a||c$; В) $c||b$; Г) $c||d$.

16. Найдите $\angle 2$ и $\angle 3$ на рисунке 10, если $a||b$, $c||d$ и $\angle 1=122°$.
   А) $\angle 2 = 122°$, $\angle 3 = 58°$; Б) $\angle 2 = 130°$, $\angle 3 = 58°$;
   В) $\angle 2 = 122°$, $\angle 3 = 68°$; Г) $\angle 2 = 130°$, $\angle 3 = 50°$.

17. Каким еще словом называют “Геометрию” в восточных странах?
   А) Риезат; Б) Ал-джабр;
   В) Планиметрия; Г) Хандаса.

18. Сколько существует прямых проходящих через две заданные точки?
   А) одна; Б) две; В) четыре; Г) бесконечно много.

19. Какой ответ соответствует геометрической фигуре, не имеющей измерений?
   А) отрезок; Б) луч; В) точка; Г) прямая.

20. Найдите длину отрезка MK, если точки M, N, K лежат на одной прямой и MN=10 см, NK=8 см.
   А) 2 *см*; Б) 18 *см*; В) 10 *см*; Г) ответы *А* и *В*.

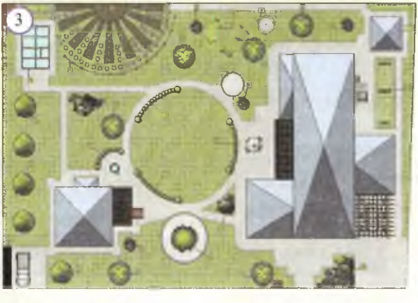
21. Сколько прямых можно провести через каждые две из трех различных точек?
   А) три; Б) две; В) одну; Г) четыре.

22. На какое наибольшее число частей делят плоскость четыре прямые?
   А) 8; Б) 9; В) 10; Г) 12.

23. На сколько градусов больший из смежных углов больше, чем меньший, если больший угол в 4 раза больше меньшего?
   А) 108°; Б) 144°; В) 104°; Г) 90°.

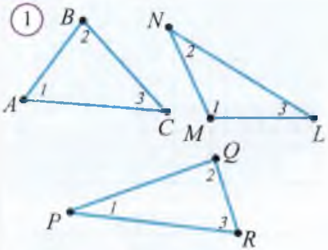
ГЛАВА V

СВЯЗЬ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ ТРЕУГОЛЬНИКА



41 ТЕОРЕМА О СУММЕ ВНУТРЕННИХ УГЛОВ ТРЕУГОЛЬНИКА

Активизирующее упражнение.

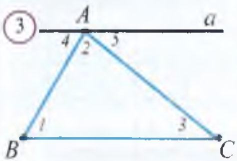


1. Измерьте транспортиром все три угла треугольника ABC, данного на рисунке, и найдите их сумму. Такую же работу выполните и для треугольников MNL и PQR. Заполните таблицу по результатам вычислений. Какое свойство вы заметили? Выразите его в одном предложении.

Треугольники	$\angle 1$	$\angle 2$	$\angle 3$	$\angle 1+\angle 2+\angle 3$
ΔABC				
ΔMNL				
ΔPQR				

2. На листе бумаги начертите треугольник ABC, вырежьте его и, обозначив его углы цифрами 1, 2, 3, оторвите их. Затем сложите их как показано на рисунке 2. Какой вывод можно сделать?

Теперь мы докажем одну из важнейших теорем геометрии – теорему о сумме углов треугольника.



Сумма углов треугольника равна 180°.

ΔABC – *треугольник* ⇒ $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$

Доказательство. Через вершину A проведем прямую a, параллельную стороне BC (рис. 3).

$\angle 1 = \angle 4$, так как эти углы накрест лежащие при параллельных a и BC и секущей AB.

$\angle 3 = \angle 5$, так как эти углы накрест лежащие при параллельных a и BC и секущей AC.

$\angle 4 + \angle 2 + \angle 5 = 180°$, так как эти углы имеют одну вершину и образуют развернутый угол. Из этого равенства следует, что,

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°, \text{ т. е. } \angle A + \angle B + \angle C = 180°$$

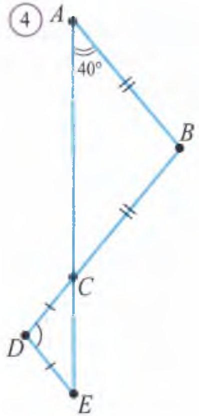
Теорема доказана.

Задача 1. Используя сведения, данные на рисунке 4, Найдите неизвестный угол x.

Решение: Так как ΔABC – равнобедренный, то $\angle ACB=\angle A=40°$. По свойству вертикальных углов, $\angle DCE=\angle ACB=40°$. По условию ΔCED также равнобедренный. Поэтому $\angle DCE=\angle DEC=40°$.

Значит, по теореме о сумме углов треугольника в ΔCDE: $40°+40°+x=180°$ или $x=100°$.

Ответ: 100°.



Задача 2. Найдите градусную меру углов треугольника, если они относятся как 2:3:7.

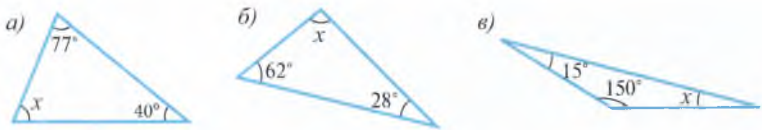
Решение: Углы треугольника обозначим, следуя условию, $2x$, $3x$ и $7x$. Тогда по теореме о сумме углов треугольника получим уравнение $2x+3x+7x=180°$, откуда находим, что $x=15°$.

Значит, градусные меры углов треугольника 30°, 45° и 105°.

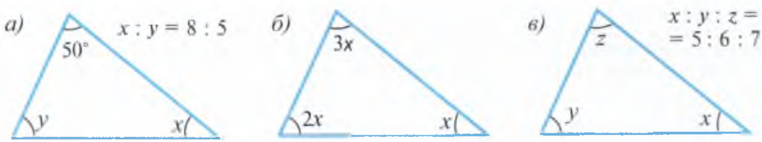
Ответ: 30°, 45°, 105°.

Вопросы, задачи и задания

1. Сформулируйте теорему о сумме углов треугольника.
2. Продемонстрируйте теорему на чертеже.
3. Сколько прямых углов может быть у треугольника?
4. Сколько тупых углов может иметь треугольник?
5. Существуют ли треугольники с углами 5° и 55°?
6. А треугольник с углами 100°, 20° и 50°?
7. Найдите третий угол треугольника, если два угла треугольника: а) 60° и 40°; б) 70° и 85°; в) 90° и 45°; г) 105° и 30°.



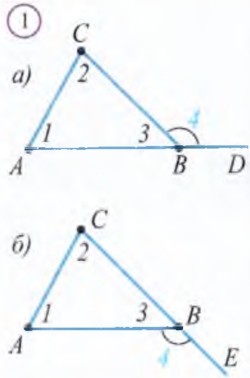
8. Найдите неизвестный угол.



9. Найдите неизвестные углы.
10. Проверьте практическую верность теоремы на примерах.

42 СВОЙСТВО ВНЕШНЕГО УГЛА ТРЕУГОЛЬНИКА

Угол, смежный углу треугольника, называется его ***внешним углом***.



На рисунке 1 изображены внешние углы CBD и ABE треугольника ABC при вершине B. Очевидно, что эти углы равны как вертикальные. Начертите и покажите на чертеже внешние углы при вершинах A и C.

Углы треугольника, для того чтобы отличать их от внешних углов, называют также ***внутренними углами***.

Геометрическое исследование

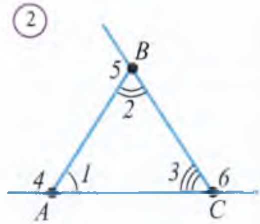
Измерьте с помощью транспортира все внутренние и внешние углы треугольника ABC на рисунке 2 и сравните величины каждого внешнего угла треугольника с суммой двух внутренних углов, не смежных с ним:

а) $\angle 4$ и $\angle 2 + \angle 3$

б) $\angle 5$ и $\angle 1 + \angle 3$

в) $\angle 6$ и $\angle 1 + \angle 2$

К какому выводу вы пришли в результате сравнения? Сформулируйте его в виде предположения.



Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним.

В треугольнике ABC $\angle 4$ – внешний угол (*рис. 1*)	⇨	$\angle 1 + \angle 2 = \angle 4$

Доказательство. Обратимся к рисунку 1. По свойству смежных углов $\angle 3 + \angle 4 = 180°$.

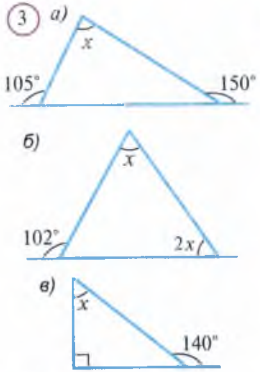
По теореме о сумме углов треугольника $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$.

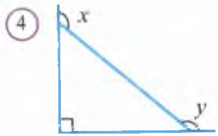
Из этих двух равенств следует, что

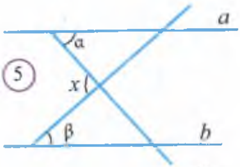
$\angle 1 + \angle 2 + \cancel{\angle 3} = \cancel{\angle 3} + \angle 4$. Таким образом, $\angle 1 + \angle 2 = \angle 4$.

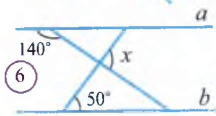
Теорема доказана.

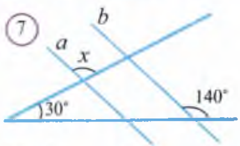
Следствие. Внешний угол треугольника больше каждого из внутренних углов, не смежных с ним.

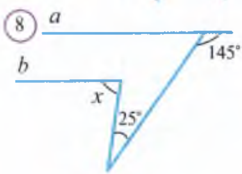












Вопросы, задачи и задания

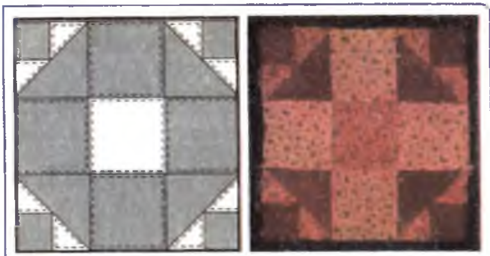
1. Что такое внешний угол треугольника?
2. Сформулируйте теорему о внешнем угле треугольника.
3. Найдите внутренние углы треугольника, если два его внешних угла равны 120° и 135°.
4. Один из внутренних углов треугольника равен 30°, один из внешних углов равен 60°. Найдите оставшиеся внутренние углы треугольника.
5. Найдите неизвестный угол на рисунке 3.
6. На рисунке 4 найдите $x + y$.
7. Чему равен угол x, если $a \| b$ на рисунке 5.
8. Чему равен угол x, если $a \| b$ на рисунке 6.
9. Чему равен угол x, если $a \| b$ на рисунке 7.

10.* Чему равен угол x, если $a \| b$ на рисунке 8.

11. Может ли внешний угол треугольника быть острым? Если может, то сколько таких углов имеется у треугольника?

12.* Найдите сумму внешних углов треугольника.

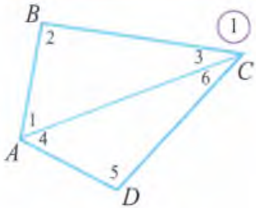
13. Внешний угол при вершине P треугольника PQR равен 120°, а при вершине Q – 100°.
    а) Найдите внутренние углы треугольника.
    б) Найдите острый угол между биссектрисами углов при вершинах P и R.



Используя вышеприведенный пример, начертите геометрическую разметку панно на рисунке 6 титульного листа главы V на странице 97.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

Задача. Докажите, что сумма углов четырехугольника равна 360°.

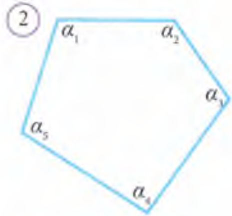


Решение: Начертим произвольный четырехугольник $ABCD$. Соединив вершины A и C, разобьем его на два треугольника. Сумма внутренних углов каждого из треугольников ABC и ADC равна 180° (рис. 1):

$\angle1+\angle2+\angle3=180°$, $\angle4+\angle5+\angle6=180°$.

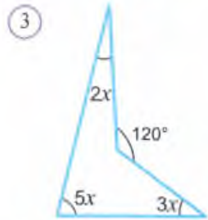
$\angle A=\angle1+\angle4$ и $\angle C=\angle3+\angle6$, то

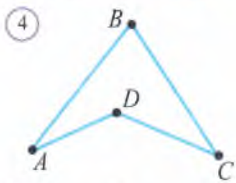
$$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=(\angle1+\angle4)+\angle2+(\angle3+\angle6)+\angle5=$$
$$=(\angle1+\angle2+\angle3)+(\angle4+\angle5+\angle6)=180°+180°=360°.$$

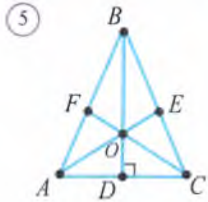


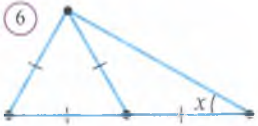
Вопросы, задачи и задания

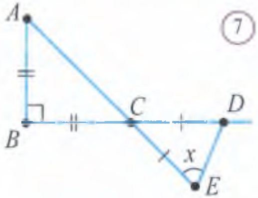
1. Градусные меры двух углов треугольника относятся как 5:9, третий угол на 10° меньше, чем меньший из них. Найдите углы треугольника.
2. Внутренние углы треугольника, не смежные с его внешним углом, равным 108°, относятся как 5:4. Найдите эти внутренние углы.
3. Могут ли две стороны треугольника быть перпендикулярными его третьей стороне?
4. Могут ли у треугольника быть: а) 1; б) 2; в) 3 тупых внешних угла?
5. Могут ли быть равными внутренний и внешний углы треугольника при одной его вершине?
6.* Найдите сумму углов пятиугольника на рис. 2.
7. Найдите неизвестные углы на рисунке 3.
8. Какое изменение надо внести в доказательство, если четырехугольник не будет выпуклым (рис. 4)?
9. Один из углов равнобедренного треугольника равен: а) 120°; б) 70°. Найдите два других угла.
10. Угол при основании равнобедренного треугольника равен а) 15°; б) 75°? Найдите его остальные углы?
11. Докажите, что если соответствующие стороны двух треугольников параллельны, то прилежащие к ним углы равны.

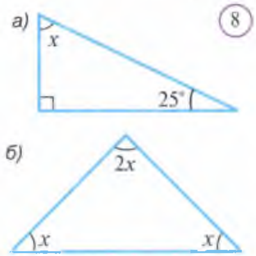




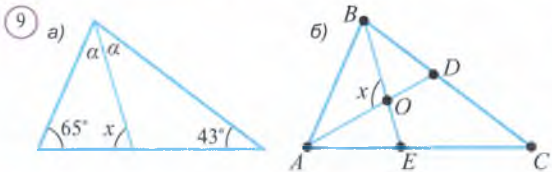


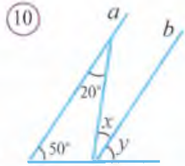






12. Найдите углы AOB и EOC, если $AB=BC$, $\angle ABC=50°$, AE и FC – биссектрисы на рисунке 5.
13. Найдите на рисунке 6 неизвестный угол x.
14. Найдитс на рисунке 7 неизвестный угол x.
15. Пусть соответствующие стороны двух треугольников перпендикулярны. Будут ли равны соответствующие им углы? Обоснуйте ответ.
16. Можно ли из какого-нибудь треугольника получить два остроугольных треугольника с помощью одного разреза вдоль прямой? Обоснуйте свой ответ.
17. Найдите на рисунке 8 неизвестные углы.
18. На рисунке 9. а) x = ?; б) x = ? если AD и BE – биссектрисы, $\angle BAC = 64°$, $\angle ABC = 96°$.
19. Если на рисунке 10 $a||b$, x=?, y=?
20*.Найдите α если известно, что для углов треугольника α, β, γ:
   а) $\alpha=\beta+\gamma$;
   б) $\alpha=(\beta+\gamma)/2$.
21. Найдите углы равностороннего треугольника.
22. Найдите углы равнобедренного прямоугольного треугольника.





Точность и краткость в геометрии

Известно, что точное математическое предложение достаточно полное и вместе с тем краткое, не должно содержать лишних слов.

1. Попробуйте найти лишние слова в следующем предложении:
   Если два накрест лежащих угла при параллельных прямых и секущей равны между собой, то эти прямые параллельны.
2. Используя подходящие термины, сократите следующие предложения:
   а) многоугольник с наименьшим числом сторон;
   б) хорда, проходящая через центр окружности;
   в) равнобедренный треугольник, основание которого равно боковой стороне.

44 СВОЙСТВА ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

Напомним, что у прямоугольного треугольника один угол прямой (90°), а два других острые. В прямоугольном треугольнике сторона, противолежащая прямому углу, называется *гипотенузой*, а каждая из двух оставшихся сторон называется *катетом*. Рассмотрим теперь некоторые свойства прямоугольного треугольника.

Свойство 1. **Сумма двух острых углов прямоугольного треугольника равна 90°.**

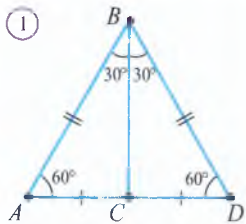
На самом деле, сумма внутренних углов треугольника равна 180°. Но один из углов прямоугольного треугольника равен 90°. Поэтому сумма двух оставшихся углов также равна $180° - 90° = 90°$

Отсюда следует, что два других угла острые. *Свойство доказано.*

Задача 1. Катет, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы.

Пусть $\angle ACB=90°$ и $\angle ABC = 30°$ в прямоугольном треугольнике ABC на рисунке 1. В таком случае $\angle BAC=60°$.

Построим, как показано на рисунке 1, треугольник BCD, равный данному треугольнику. В результате получим треугольник ABD, все углы которого равны 60°.



Очевидно, треугольник ABD равносторонний. В частности, $AB = AD$. Но,

$$AD = AC + CD = 2AC.$$

Следовательно, $AB = 2AC$, т.е. $AC = \frac{AB}{2}$.

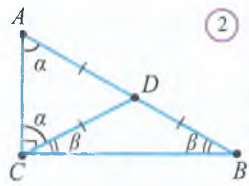
Верно также и обратное свойство:

Свойство 2. **Если один из катетов прямоугольного треугольника равен половине гипотенузы, то этот катет противолежит углу 30°.**

Упражнение. Докажите второе свойство самостоятельно.

Задача 2. В прямоугольном треугольнике ABC угол C – прямой, AB=12 и $CD=DB$. Найдите CD (рис. 2).

Решение. По условию задачи CDB – равнобедренный треугольник (рис. 2).



Обозначим $\angle ACD=\alpha$, $\angle DCB=\beta$. Так как, $\angle\alpha+\beta=90°$. Также, $\alpha+\beta=90°$ (по первому свойству). $\angle A=\alpha$.

Поэтому ΔADC — равнобедренный треугольник. Следовательно, $AD=CD=DB$, т.е. точка D – середина стороны AB. Тогда $CD = \frac{AB}{2} = 6$.

При решении этой задачи мы показали, что $AD=DB$ и $AD=CD$. Эти равенства верны и для произвольного треугольника, так как при выводе этих равенств мы не использовали величину длины AB. Это разъясняет следующее свойство прямоугольного треугольника.

***Свойство 3.* В прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, равна ее половине.**

К этому важному свойству мы вернемся в 8 классе.

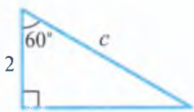
«Сладкая геометрия»: Кондитерские изделия в виде геометрических фигур

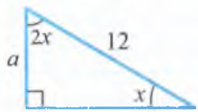
Вопросы, задачи и задания

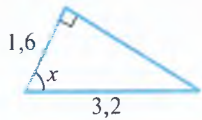
1. Как называются стороны прямоугольного треугольника?
2. Чему равна сумма острых углов прямоугольного треугольника?
3. Может ли какой-нибудь из углов прямоугольного треугольника быть тупым?
4. Сколько высот у прямоугольного треугольника?
5. Какая имеется связь между катетом, противолежащим углу 30°, и гипотенузой?

6* Покажите, что в равнобедренном прямоугольном треугольнике высота, опущенная на гипотенузу, равна ее половине.

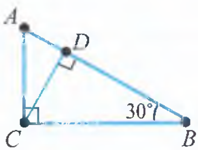
7. а) $c=?$ б) $a=?$ в) $x=?$

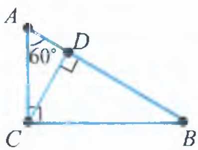


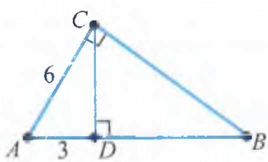




8. а) $AB=20$, $AD=?$ б) $AB=18$, $BD=?$ в) $BD=?$







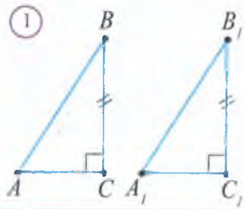
9. Медиана, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, равна 8 *см*. Пусть один из углов треугольника равен 60°. Найдите стороны, прилежащие к этому углу.
10. В прямоугольном треугольнике один из острых углов в 2 раза больше другого. Найдите его большую сторону, если меньшая равна 6 *см*.

45 ПРИЗНАКИ РАВЕНСТВА ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Упражнение. Пусть даны прямоугольные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$. Эти треугольники имеют по одному равному (прямому) углу. Поэтому для прямоугольных треугольников признаки равенства значительно упрощаются.

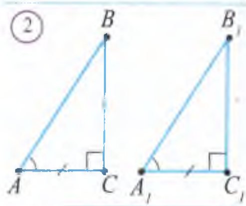
Приведем признаки равенства прямоугольных треугольников по двум катетам (КК признак), катету и острому углу (КУ признак), гипотенузе и острому углу (ГУ признак) и гипотенузе и катету (ГК признак):

Теорема. КК признак. **Если катеты одного прямоугольного треугольника соответственно равны катетам другого прямоугольного треугольника, то эти треугольники равны** (*рис. 1*).



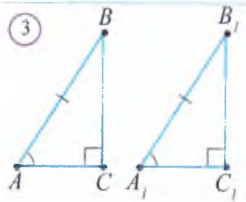
Этот признак непосредственно следует из признака равенства треугольников СУС.

Теорема. КУ признак. **Если катет и прилежащий к нему угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и прилежащему к нему углу второго прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны** (*рис. 2*).



Этот признак непосредственно следует из признака равенства треугольников УСУ.

Теорема. ГУ признак. **Если гипотенуза и острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и острому углу второго прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны** (*рис. 3*).



Сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90°. Следовательно, другие острые углы прямоугольного треугольника также равны между собой. Этот признак непосредственно следует из признака равенства треугольников УСУ.

Теорема. ГК признак. **Если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и катету второго треугольника, то такие треугольники равны** (*рис. 4*).

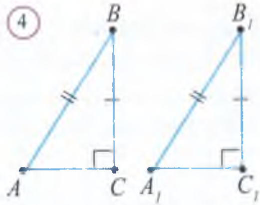
Доказательство. Даны треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ (рис. 4) и пусть у них $\angle C = 90°$, $\angle C_1 = 90°$, $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$. Надо показать, что $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$

У треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ равны две стороны: $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$. Если удастся показать, что углы ABC и $A_1B_1C_1$ так же равны, то равенство треугольников будет следовать из признака СУС.

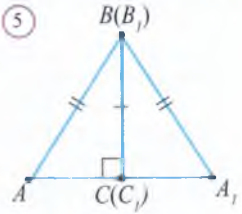
Для доказательства приложим к треугольнику ABC треугольник $A_1B_1C_1$, совместив катет BC с равным ему катетом B_1C_1 (рис. 5). Тогда лучи CA и C_1A_1 образуют развернутый угол, так как $\angle C$ и $\angle C_1$ – прямые, т. е. точки A, C, C_1 и A_1 будут лежать на одной прямой. В результате треугольник ABA_1 будет равнобедренным. Но высота равнобедренного треугольника, опущенная на основание, будет биссектрисой (согласно заключению теоремы на стр. 66). Значит, $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$.

ГК признак доказан.

4



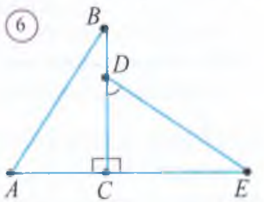
5



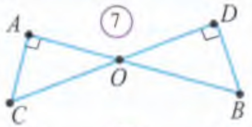
Вопросы, задачи и задания

1. Почему признаки равенства прямоугольных треугольников проще признаков равенства обычных треугольников?
2. Назовите и сформулируйте признаки равенства прямоугольных треугольников.
3. Будут ли равны прямоугольные треугольники, если катет и угол одного треугольника соответственно равны катету и углу второго треугольника?
4. Будут ли равны треугольники ACB и DCE, если на рисунке 6:
   а) $\angle A=\angle D$, $\angle B=\angle E$; б) $BC=DE$, $AB=CE$;
   в) $AC=CD$, $BC=CE$; г) $AB=DE$?
5. Будут ли равны треугольники OAC и ODB, если на рисунке 7:
   а) $OC=OB$; б) $AC=BD$; в) $AO=OD$;
   г) $AC=OD$; д) $\angle OCA=\angle OBD$?
6. Докажите, что если в прямоугольных треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ углы A и A_1 прямые, BD и B_1D_1 биссектрисы, $\angle B=\angle B_1$, $BD=B_1D_1$, то $\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$.

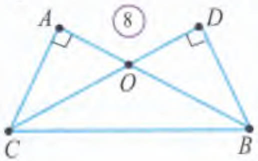
6



7



8



7. Будут ли равны треугольники BAC и CDB, если на рисунке 8: а) $AC=BD$; б) $OA=OD$; в) $\angle OCB=\angle OBC$; г) $BC=OD$; д) $\angle ACB=\angle DBC$?
8. В треугольнике ABC проведена высота BD. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный, если $AD=DC$.
9. В остроугольном треугольнике ABC равны высоты AA_1 и CC_1. Докажите, что $\angle BAC=\angle BCA$.
10. Найдите примеры из окружающего вас мира.

46 РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

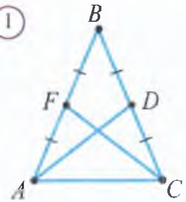
Задача. В равностороннем треугольнике ABC проведены медианы AD и CF к боковым сторонам. Докажите, что $\Delta ADC=\Delta CFA$ и $\Delta ADB=\Delta CFB$ (*рис. 1*).

ΔABC, $AB=BC$, AD и CF – медианы	⇒	$\Delta ADC=\Delta CFA$; $\Delta ADB=\Delta CFB$

Доказательство. Так как $AB=BC$, то отрезки, отделяемые медианами AD и CF, равны между собой:

$$AF=FB=BD=CD. \qquad (1)$$

1



а) В треугольниках ADC и CFA:

1. $\angle ACD=\angle FAC$, так как ΔABC – равносторонний;
2. AC – общая сторона;
3. $AF=CD$ – (1) по равенству.

Следовательно, по признаку СУС равенства треугольников $\Delta ADC=\Delta CFA$.

б) Докажите самостоятельно, что $\Delta ADB=\Delta CFB$.

1. Медианы равностороннего треугольника ABC пересекаются в точке O. Найдите угол $\angle AOB$.
2. Найдите углы треугольника, если они пропорциональны следующим числам: а) 1, 2, 3; б) 2, 3, 4; в) 3, 4, 5; г) 4, 5, 6; д) 5, 6, 7.
3. Могут ли в треугольнике быть: а) два тупых угла; б) тупой и прямой углы; в) два прямых угла?
4. Могут ли углы при основании равнобедренного треугольника быть тупыми?
5. Один из углов равнобедренного треугольника равен $100°$. Найдите остальные углы.
6. Чему равны углы равностороннего треугольника?
7. Может ли равнобедренный треугольник быть равносторонним, если один из его углов равен $60°$?
8. В равностороннем треугольнике ABC с основанием AC проведена биссектриса CD. Найдите углы треугольника, если угол ADC равен: а) $60°$; б) $75°$.
9. В треугольнике ABC из вершин A и B проведены биссектрисы. Точка пересечения биссектрис обозначена буквой D. Найдите угол ADB, если $\angle A=50°$, $\angle B=50°$.

10. Докажите методом от противного следующее:

а) при пересечении двух пересекающихся прямых третьей прямой, сумма внутренних односторонних углов не равна 180°; б) если прямая перпендикулярна одной из двух пересекающихся прямых, то она не перпендикулярна второй; в) если в треугольнике нет равных углов, то он не будет равносторонним.

11. Углы одного треугольника равны 60° и 38°, а другого 38° и 82°. Могут ли эти треугольники быть равными?

12. Углы одного треугольника равны 32° и 50°, а другого 38° и 50°. Могут ли эти треугольники быть равными?

13. Через вершины равностороннего треугольника ABC проведены прямые параллельные его противоположным сторонам. Докажите, что эти прямые пересекаются и точки пересечения являются вершинами равностороннего треугольника.

14. Дан треугольник ABC. Докажите, что не существует точки X, принадлежащей стороне AC и удовлетворяющей условию $\angle ABX = \angle CXB$.

15. Под каким углом пересекаются биссектрисы двух внутренних односторонних углов, полученных при пересечении параллельных прямых третьей прямой?

16. Внешний угол равнобедренного треугольника равен 70°. Найдите углы треугольника.

17. Докажите, что в прямоугольном треугольнике катет лежащий против угла в 30° равен половине его гипотенузы.

18. Найдите углы равнобедренного прямоугольного треугольника.

19. В равностороннем треугольнике ABC проведена медиана AD. Найдите углы треугольника ABD.

20. В треугольнике ABC медиана BD равна половине стороны AC. Найдите угол B треугольника.

21. Прямая a проходит через середину отрезка BC. Докажите, что точки B, C находятся на равном расстоянии от прямой a.

22. Отрезок BC пересекает прямую a в точке O. Расстояния от точек B и C до прямой a равны. Докажите, что точка O есть середина отрезка BC.

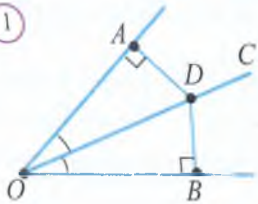
23. Докажите, что расстояния от любых двух точек прямой до прямой параллельной ей равны.

24. Докажите, что расстояния от вершин равностороннего треугольника до прямых, содержащих стороны этого треугольника, равны.

47 СВОЙСТВО БИССЕКТРИСЫ УГЛА

Если вы помните, расстоянием от точки до прямой называется длина перпендикуляра, опущенного из точки на прямую.

Расстояния от любой точки биссектрисы неразвернутого угла до его сторон равны.

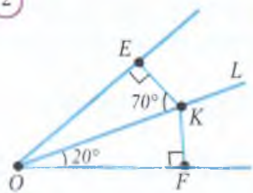


Доказательство. Пусть даны угол O и его биссектриса OC (рис. 1). Отметим на биссектрисе OC произвольную точку D и опустим перпендикуляры DA и DB на стороны угла.

В прямоугольных треугольниках OAD и OBD:

1. $\angle AOD = \angle BOD$ – по условию;
2. OD – общая гипотенуза.

По ГУ признаку равенства прямоугольных треугольников $\Delta OAD = \Delta OBD$. В частности, $DA = DB$. *Теорема доказана.*



Задача. На биссектрисе OL угла EOF взята точка K (рис. 2). Найдите углы

а) EOK и OKF;

б) EOF и EKF,

если $EK \perp OE$, $KF \perp OF$, $\angle OKE = 70°$ и $\angle KOF = 20°$.

Решение: а) Как было показано выше, $\Delta EOK = \Delta FOK$. Поэтому $\angle EOK = \angle FOK = 20°$ и $\angle OKF = \angle OKE = 70°$.

б) $\angle EOF = 2 \cdot \angle KOF = 40°$, $\angle FKE = \angle FKO + \angle OKE = 70° + 70° = 140°$.

Ответ: а) 20° и 70°; б) 40° и 140°.

Практическое задание

Измерение высоты тополя. Измерение высоты тополя. Постоим прямоугольный треугольник с острым углом 45°, сложив по диагонали несколько газетных листов. После этого встаем в такую точку, чтобы 1) один катет нашего треугольника был вертикальный, а второй – горизонтальный; 2) вершина тополя находилась на луче, содержащем гипотенузу треугольника (*рис. 3*).

Если измерить расстояние от точки, где мы стоим, до тополя и прибавить к этому числу наш рост, мы получим высоту тополя.

Вопросы, задачи и задания

1. Докажите, что произвольная точка биссектрисы угла равноудалена от сторон угла.
2. Пусть расстояние от точки на биссектрисе угла AOB до луча OA равно 7 см. Найдите расстояние от этой точки до луча OB.
3. Дан угол O и точка C на его биссектрисе. Найдите расстояния от точки C до сторон угла, если $\angle O = 60°$ и $OC = 14$ *см*.
4. Во внутренней области угла AOB выбрана точка N. Докажите, что точка N лежит на биссектрисе угла AOB, если $AN = BN$, $OA \perp AN$ и $OB \perp BN$.

5*. На листе бумаги в клетку изображена часть угла. Кусок бумаги, на котором помещалась вершина угла, оторван. Известно, что точки А и В равноудалены от сторон угла. Как построить биссектрису угла (*рис. 4*)?

6*. Докажите, что точка пересечения двух биссектрис треугольника равноудалена от всех его сторон.

7*. У равнобедренных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ равны основания AC и A_1C_1 и высоты BD и B_1D_1, опущенные на эти основания. Докажите, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.

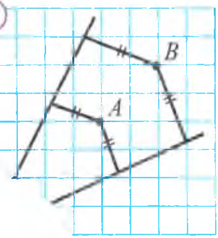
8*. В треугольнике ABC, биссектрисы углов A и B пересекаются в точке O. Докажите, что $\angle AOB = 90° + \frac{\angle C}{2}$.

9*. В треугольнике PQR, биссектрисы углов P и R пересекаются в точке O. Найдите $\angle PQR$, если $\angle POR = 100°$.

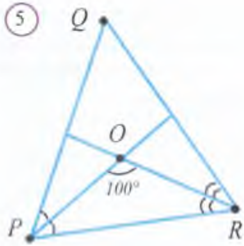
10*. Докажите, что три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

11*. Биссектрисы треугольнике MNK пересекаются в точке O. Найдите $\angle MON$, если $\angle M = 70°$, $\angle N = 68°$.

4



5



Страница истории

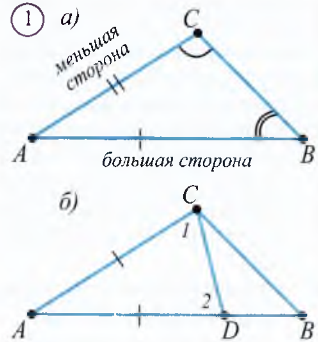
Пятый постулат Евклида

Многие ученые пытались доказать пятый постулат Евклида с помощью других аксиом, а также методом от противного. Одним из таких ученых был Джироламо Саккери, назвавший свою работу «Евклид, очищенный от всех родимых пятен, или опыт, устанавливающий самые первые принципы универсальной геометрии» (1733). К сожалению, попытки Саккери и других ученых ни к чему не привели. В XIX веке было доказано, что пятый постулат Евклида доказать невозможно.

48 СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ ТРЕУГОЛЬНИКА

Теорема. **Против большей стороны треугольника лежит больший угол (*рис.1а*).**

$\Delta ABC,\ AB>AC \Rightarrow \angle C > \angle B$



Доказательство. На луче AB отложим отрезок AD равный стороне AC. $AB>AD$, так как $AD=AC$. Отсюда следует, что точка D принадлежит отрезку AB, то есть отрезок CD делит ΔABC на две части. Теперь получим следующие выводы:

$\angle ACB > \angle ACD$ — так как отрезок CD проходит внутри;

$\angle ADC = \angle ACD$ — углы при основании равнобедренного треугольника ΔABC;

$\angle ADC > \angle ABC$ — угол ADC является внешним углом CDB.

Следовательно, $\angle ACB > \angle ABC$. *Теорема доказана.*

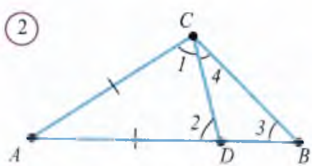
Справедлива теорема, обратная этой теореме.

Обратная теорема. **Против большего угла треугольника лежит большая сторона.**

Эту теорему докажите самостоятельно. Ее можно получить и из вышеприведенной прямой теоремы.

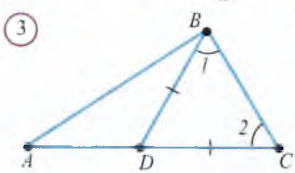
Следствие. ***В равнобедренном треугольнике против равных сторон лежат равные углы.***

Эта теорема была доказана ранее.



Задача 1. Пользуясь сведениями, данными на рисунке 2, докажите, что, $\angle 1>\angle 3$.

Решение: Так как $\angle 2 >\angle 3$, то $\angle 2$ – является внешним углом треугольника BDC и по свойству внешнего угла $\angle 2==\angle 3+\angle 4$ и $\angle 4>0$. Так как треугольник ACD – равнобедренный, то $\angle 1=\angle 2$. Следовательно, $\angle 1>\angle 3$.



Задача 2. Используя данные на рисунке 3, покажите, что $AB<AC$.

Решение: Треугольник BDC – равнобедренный (так как $BD = DC$), значит, $\angle 1=\angle 2$. Так как $\angle 1<\angle ABC$, то $\angle 2<\angle ABC$. Следовательно, $AB<AC$, так как против большего угла лежит большая сторона.

Вопросы, задачи и задания

1. Докажите, что против большей стороны треугольника лежит больший угол, и обратно, против большего угла лежит большая сторона.
2. Какой из углов треугольника ABC наибольший и какой наименьший, если AB=12 *см*, BC=10 *см*, CA=7 *см*.
3. Сравните углы ΔABC, если: а) $AB<BC<AC$; б) $AB=AC<BC$. Может ли угол A быть тупым углом?
4. Какая сторона равнобедренного треугольника наибольшая, если угол при его вершине равен 62°? А если он равен 58°?
5. Может ли в треугольнике меньшая сторона лежать против тупого угла?
6. Сравните стороны ΔABC, если а) $\angle A>\angle B>\angle C$; б) $\angle A=\angle B<\angle C$.
7. Может ли больший угол треугольника быть меньше 60°? Может ли меньший угол треугольника быть больше 60°?
8. Найдите угол, который образуется при пересечении двух биссектрис равностороннего треугольника.

9.* Пусть $AB>BC$ в треугольнике ΔABC и $\angle A=60°$. Какие значения может принимать угол B?

10.* Пусть для углов α, β и γ треугольника имеют место соотношения $\alpha<\beta+\gamma$, $\beta<\alpha+\gamma$, $\gamma<\alpha+\beta$. Каким будет этот треугольник?

11.* На рисунке 4 укажите наибольший и наименьший отрезки. Обоснуйте свой ответ.

12. Какая сторона больше в прямоугольном треугольнике, гипотенуза или катет?

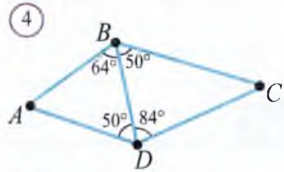
13. Треугольники ABC и PQR равны. Сравните:

    а) стороны треугольника ABC;

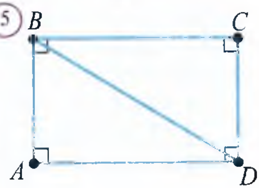
    б) стороны и углы треугольника PQR, если $\angle A=\angle B<\angle A$ и $PQ<QR$.

14.* Докажите, что противоположные стороны прямоугольника равны (рис. 5).

4



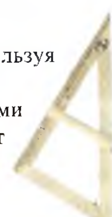
5



Практическое задание

В предыдущих главах мы научились чертить прямой угол, используя прибор, называемый угольником. Что вообще означает угольник?

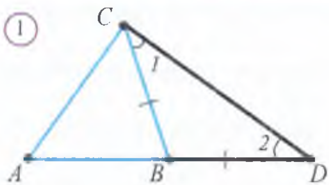
Угольником называется инструмент в виде треугольника с углами 30°, 60°, 90°. Такой же инструмент с таким же названием используют плотники. С помощью угольника легко и удобно проверять прямые углы на дверях и рамах. Постройте свой угольник. Покажите, как с помощью угольника можно построить квадрат, равносторонний треугольник.



49 НЕРАВЕНСТВО ТРЕУГОЛЬНИКА

Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон.

ΔABC – треугольник (рис. 1) ⇨ $AC < AB + BC$



Доказательство. Отложим на продолжении стороны AB отрезок BD, равный отрезку BC, и соединим точки C и D (*рис. 1*). В результате получим равнобедренный треугольник BCD. В нем $\angle 1 = \angle 2$, так как $BC = BD$. Так как отрезок BC лежит внутри угла , то $\angle ACD > \angle 1$.

Но $\angle 1 = \angle 2$, следовательно, $\angle ACD > \angle 2$.

Получили неравенство, связывающее углы треугольника ACD. Так как против большего угла лежит большая сторона, то приходим к неравенству $AC < AD$.

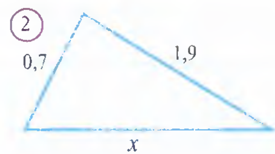
Тогда из равенства $AD = AB + BD$ следует, что $AC < AB + BD$. Если принять во внимание, что $BD=BC$, придем к искомому неравенству $AC<AB+BC$.

Теорема доказана.

Следствие 1. Для любых трех точек A, B и C, не лежащих на одной прямой, справедливы неравенства $AC<AB+BC$, $AB<AC+BC$ и $BC< AB+AC$.

Каждое из этих неравенств называется ***неравенством треугольника.***

Задача 1. Длины двух сторон треугольника 0,7 и 1,9. Найдите длину третьей стороны, если известно, что она выражается целым числом (*рис. 2*).



Решение: Длину третьей стороны треугольника найдем, исходя из неравенств треугольника:

Она меньше, чем $1,9 + 0,7 = 2,6$ но больше чем $1,9 - 0,7 = 1,2$. *Так как длина равна целому числу, то ответ:* 2.

Следствие 2. Любая сторона треугольника больше разности двух других его сторон.

Действительно, рассмотрим одно из неравенств треугольника $AB < AC + BC$ и произведем следующие преобразования: $AB - AC < BC$ или $BC > AB - AC$.

Задача 2. В четырехугольнике $ABCD$ отрезки AC и BD пересекаются (*рис. 3*). Пусть периметр четырехугольника равен P. Докажите, что имеет место двойное неравенство $\frac{1}{2}P < AC + BD < P$. Пусть отрезки AB и CD пересекаются в точке O.

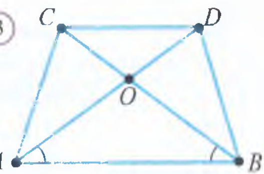
Решение: Сначала докажем левое неравенство. Применив к треугольникам AOB, BOC, COD и AOD неравенство треугольника, получим,

$$AB < OA + OB, \quad BC < OB + OC, \quad CD < OC + OD, \quad DA < OD + OA.$$

Сложив соответствующие стороны этих неравенств, придем к неравенству $AB + BC + CD + DA < 2OA + 2OB + 2OC + 2OD$. Разделив каждое его слагаемое на 2 и, учитывая равенства $OA + OC = AC$, $OB + OD = BD$, получим

$$\frac{1}{2}P < AC + BD.$$

3



Теперь докажем второе неравенство. Используя неравенство треугольника для треугольников ABD и BDC, получаем неравенства, $BD < AB + DA$, $BD < BC + CD$ и, сложив их почленно, приходим к неравенству

$$2BD < P \quad \text{или} \quad BD < \frac{1}{2}P.$$

Аналогично приходят к неравенству $AC < \frac{1}{2}P$. Из последних двух неравенств получаем доказываемое

$$AC + BD < \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}P = P$$

Задача. Возможны ли случаи, изображенные на рисунке 4?

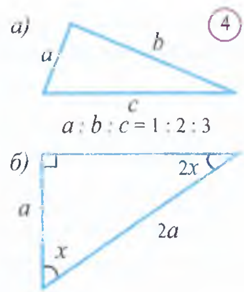
*Контрпример. Для того чтобы опровергнуть некоторое утверждение приводят **контрпример**.* Например, треугольник с углами 120°, 30°, 30° является контрпримером для вышеприведенного случая.

Вопросы, задачи и задания

1. В чем смысл неравенства треугольника?
2. Какие задачи решаются с применением неравенства треугольника?
3. Можно ли построить треугольник из отрезков с длинами 1 *м*, 2 *м* и 3 *м*?
4. Существуют ли треугольники со сторонами а) 2; 3; 4; б) 2; 2; 4; в) 3,6 ; 1,8; 5; г) 56; 38; 19?
5. Найдите третью сторону равнобедренного треугольника, если длины двух других сторон: а) 7 и 3; б) 10 и 5; в) 8 и 5.
6. Верны ли данные задачи на рисунке 4?
7. Докажите, что каждая сторона треугольника больше разности двух других его сторон.
8. Найдите стороны равнобедренного треугольника, если его периметр равен 25 *см*, одна сторона больше другой на 4 *см* и один из внешних углов острый.

9.* Сколько можно построить различных треугольников из отрезков с длинами 2; 3; 4; 5 и 6?

10. Какую геометрическую фигуру выражают отрезки AB, BC и AC, если для трех точек плоскости A, B, C выполнястся неравенство $AB+BC \geq AC$?



50 ПОВТОРЕНИЕ ГЛАВЫ

1. Заполните пропуски в предложениях в соответствии со смыслом.

1. Угол, ... внутреннему углу треугольника, называется его внешним углом.
2. 180° равна .... треугольника.
3. Треугольник, сумма двух углов которого равна 90°, будет ....
4. Внешний угол треугольника равен .... не смежных с ним .
5. Если один из углов треугольника тупой, то два остальных угла ..... .
6. Углы прямоугольного треугольника не могут ....
7. Каждая сторона треугольника .... суммы остальных сторон.
8. Если у двух прямоугольных треугольников равны гипотенуза и .... , то эти треугольники равны.
9. Если у прямоугольных треугольников равны катеты, то ....
10. Если в прямоугольном треугольнике к гипотенузе проведена ...., то она равна половине этой гипотенузы.
11. Если в прямоугольном треугольнике .... , то он противолежит углу 30°.
12. Точки, равноудаленные от сторон угла, лежат ....

2. Если в следующих фразах имеются ошибки, найдите и исправьте их.

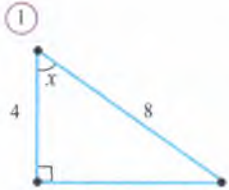
1. Если у прямоугольных треугольников равны гипотенузы и по одному острому углу, то эти треугольники равны.
2. Сумма внутренних и внешних углов треугольника равна 180°.
3. Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов.
4. В треугольнике против большей стороны лежит меньший угол, против большего угла лежит меньшая сторона.
5. Каждая сторона треугольника меньше разности остальных сторон.
6. У прямоугольного треугольника есть только одна высота.
7. У прямоугольного треугольника катет равен половине гипотенузы.
8. У прямоугольного треугольника высота равна половине гипотенузы.
9. Если у прямоугольных треугольников равны гипотенузы, то эти треугольники также равны.
10. Внутренний угол треугольника всегда меньше суммы двух оставшихся углов.
11. Внешние углы треугольника всегда тупые.

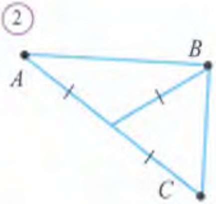
3. Найдите соответствующие геометрические понятия для свойств и толкований, приведенных в таблице.

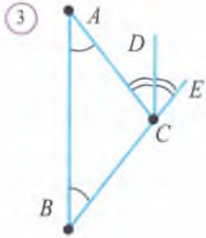
1.	Сумма внутренних углов равна 180°	
2.	Сумма острых углов равна 90°	
3.	Стороны состоят из отрезков	
4.	Соотношение между сторонами	
5.	Равна половине гипотенузы	
6.	Все три высоты пересекаются в одной вершине	
7.	Всегда больше катетов	
8.	Точки равноудалены от сторон угла	

4. Задачи.

1. Можно ли построить замкнутую ломаную, длины звеньев которой равны 1 *м*, 2 *м*, 4 *м*, 8 *м* и 16 *м*?
2. Найдите стороны треугольника, длины которых выражаются целыми числами, если его периметр равен 15.
3. Всегда ли высота треугольника меньше его сторон?
4. Углы треугольника, большая сторона которого равна 36, относятся как 1:2:3. Найдите меньшую сторону треугольника.
5. Высота треугольника, опущенная на его основание, образует с боковыми сторонами углы 27° и 36°. Найдите углы треугольника.
6. Докажите, что прямоугольные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны, если углы A и A_1 – прямые, BD и B_1D_1 – биссектрисы и $\angle B=\angle B_1$, $BD=B_1D_1$.
7. Найдите x на рисунке 1.
8. Найдите $\angle ABC$ на рисунке 2.
9. Докажите, что на рисунке 3 $AB||CD$.







10. Один из углов равнобедренного треугольника равен 100°. Найдите остальные углы треугольника.

11. Будет ли равнобедренный треугольник равносторонним, если один из его углов равен 60°?

12. В равнобедренном треугольнике *ABC* с основанием *AC* и углом *B*=36° проведена биссектриса *AD*. Докажите, что *CDA* и *ADB* равнобедренные треугольники.

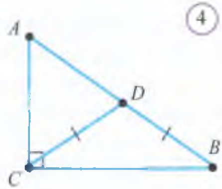
13. Углы одного треугольника равны 50° и 48°, а другого 56° и 63°. Могут ли эти треугольники быть равными?

14. Найдите наибольшую сторону треугольника, если его стороны больше периметра треугольника на 14 *см*, 16 *см* и 24 *см*.

15. Из вершины прямого угла прямоугольного треугольника *ABC* опущена высота *CD*. Найдите угол *CDB*, если 1) $\angle A = 24°$; 2) $\angle A = 70°$.

16. Один из внешних углов равнобедренного треугольника равен 70°. Найдите его внутренние углы.

17. Высоты, опущенные из вершин *A* и *C* треугольника *ABC*, пересекаются в точке *N*. Найдите угол *ANC*, если $\angle A = 50°$ и $\angle C = 84°$.

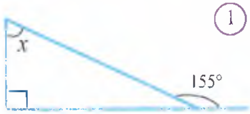


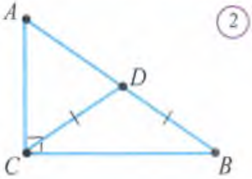
18. Медиана *BD* в треугольнике *ABC* равна половине стороны *AC*. Найдите угол *B* треугольника.

19. На рисунке 4 найдите *AB*, если *BD*=*CD*=10.

20. Верно ли утверждение: «Один из углов треугольника меньше суммы двух других его углов»? А утверждение: «Один из углов треугольника меньше разности двух других его углов»?

51 5-АЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА





Контрольная работа состоит из двух частей: в первой части 3 задачи из приведенных ниже (или им подобные задачи), во второй 5 тестов, подобных ниже.

Задачи.

1. Найдите неизвестный угол (*рис. 1*).
2. Найдите углы треугольника, если один из его внешних углов равен 120°, а несмежные с ним углы относятся как 1:2.
3. На рисунке 2 угол $ACB=90°$, $CD=BD$ и $AB=24$. Найдите CD.
4. Биссектриса BD в ΔABC пересекает сторону AC под углом 100°. Найдите стороны треугольника, если $BD=BC$.

Тесты.

1. Найдите углы треугольника, если они относятся как 2:3:4.

   А) 20°, 30°, 40°; Б) 40°, 60°, 80°; С) 36°, 54°, 90°; В) 18°, 27°, 36°.

2. Определите вид треугольника, если его углы относятся как 3:2:1.

   А) Остроугольный. Б) Тупоугольный.
   С) Прямоугольный. В) Невозможно определить.

3. Определите вид треугольника, если один из его внешних углов острый.

   А) Остроугольный. Б) Тупоугольный.
   С) Прямоугольный. В) Невозможно определить.

4. Определите вид треугольника, если один из его углов больше суммы двух других.

   А) Остроугольный. Б) Тупоугольный.
   С) Прямоугольный. В) Невозможно определить.

5. У какого треугольника высоты пересекаются в одной его вершине?

   А) Равностороннего треугольника.
   Б) Равнобедренного треугольника.
   В) Прямоугольного треугольника.
   Г) Такой треугольник не существует.

6. У треугольника ABC внешний угол при вершине A равен 120°, внутренний угол при вершине C равен 80°. Найдите внешний угол при вершине B.

А) 120°; Б) 140°; В) 160°; Г) 40°.

7. Один из внешних углов треугольника равен 120°, разность двух несмежных с ним внутренних углов равна 30°. Найдите больший из внутренних углов.

А) 70°; Б) 75°; В) 85°; Г) 90°.

8. Величины двух внутренних углов относятся как 1:2. Третий угол на 40° больше, чем меньший из этих углов. Найдите больший угол треугольника.

А) 105°; Б) 75°; В) 80°; Г) 90°.

9. Периметр равнобедренного треугольника равен 48, одна из его сторон равна равна 12. Найдите остальные стороны.

А) 18, 12; Б) 16, 16; В) 18, 24; Г) 18, 18.

10. Угол между биссектрисой и высотой, исходящих из вершины прямого угла, равен 24°. Найдите меньший угол треугольника.

А) 21°; Б) 24°; В) 36°; Г) 16°.

11. Чему равен $\angle A$ на рисунке 3.

А) 10°; Б) 20°; В) 60°; Г) 100°.

12. Сколько разносторонних треугольников можно построить из отрезков с длинами 3, 5, 7 и 11?

А) 2; Б) 3; В) 5; Г) 6.

13. Чему равна сумма углов $x + y$ на рисунке 4.

А) 90°; Б) 180°; В) 270°;
Г) определить невозможно.

14. Чему равен $\angle BCA$ на рисунке 5.

А) 90°; Б) 96°; В) 144°;Г) 84°.

15. Найдите угол x, если $a \| b$ на рисунке 6.

А) 35°; Б) 45°; В) 25°; Г) 20°.

16. Найдите угол x на рисунке 7.

А) 60°; Б) 55°; В) 65°; Г) 70°.

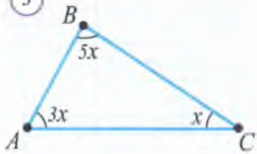
17. Найдите угол x на рисунке 8.

А) 30°; Б) 45°; В) 15°; Г) 75°;

18. Сколько треугольников можно построить из отрезков с длинами 2 *см*, 3 *см*, 4 *см*, 5 *см*?

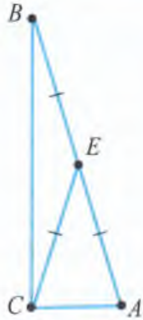
А) 1; Б) 2; В) 3; Г) 4.

3

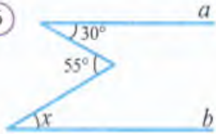


4

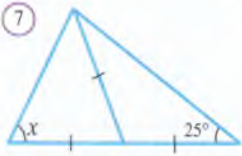
5



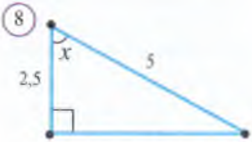
6



7



8



К титульному листу главы V на странице 97

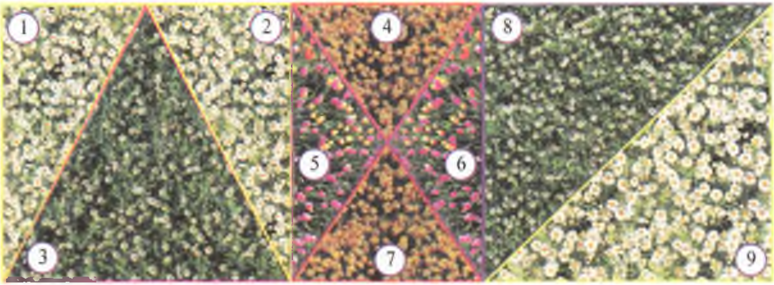
1. Ответьте на вопросы к рисунку 3.
1) Какую геометрическую форму имеет площадь на рисунке?
2) Какую геометрическую форму имеют крыши зданий и сооружений?
3) Какие геометрические формы имеются на приусадебном участке?
4) Сравните фигуры крыши каждого здания с фигурами крыш других зданий.
5) Среди этих геометрических фигур укажите на равносторонние, равнобедренные, прямоугольные, подобные, равные между собой треугольники.
6) Какие еще фигуры имеются на рисунке, которые можно сравнить между собой?

2. Из какого вида треугольников составлена мебель на рисунках 2-5? Что вы можете сказать о связях между элементами этих треугольников?

3. Какие еще геометрические фигуры представлены на этих рисунках?

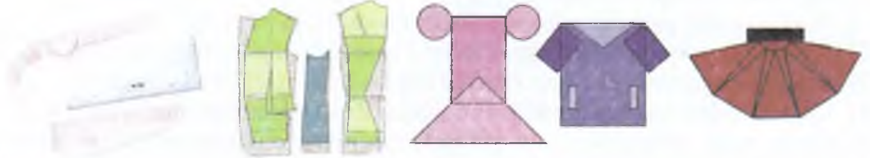
Лоскутное шитье – превращение лоскутков ткани различной геометрической формы в полезные, даже элегантные изделия.

4. Назовите геометрическую форму этих цветников.



1) Сравните их друг с другом.
2) Измерьте углы каждой фигуры.
3) Выделите среди них равнобедренные, равносторонние, подобные и равные треугольники.
4) Рассмотрев взаимное расположение треугольников, выскажите предположения о связях между углами этих треугольников.

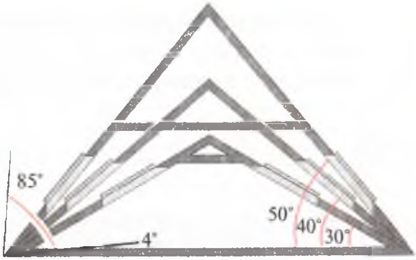
5. При раскрое одежды используют инструмент называемый лекалом. Для построения выкройки лекала прикладывают к ткани и обводят мелом. Затем специальными приборами ткань разрезают по намеченным линиям.



6. Угол наклона крыши здания обычно находится в переделах от 4° до 85°. Рекомендуемый угол наклона зависит от типа покрывающих крышу материалов.

Например:

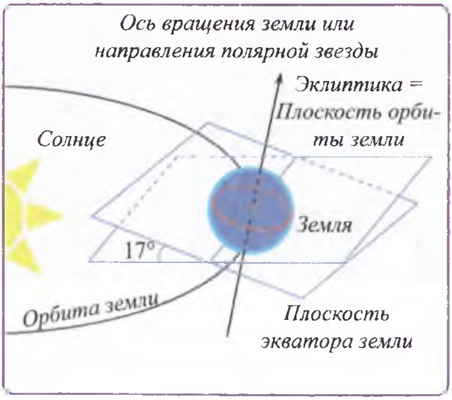
Крыша, покрытая железными или оцинкованными листами имеет наклон не меньше 16°; рубероидная крыша – не меньше 4°; крыша из черепицы – не меньше 30°; крыша из шифера – не меньше 27°.



7. Определите с помощью транспортира угол наклона крыш на рисунке.

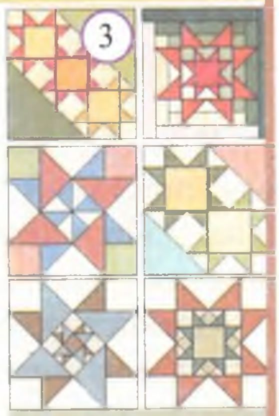
Страница истории

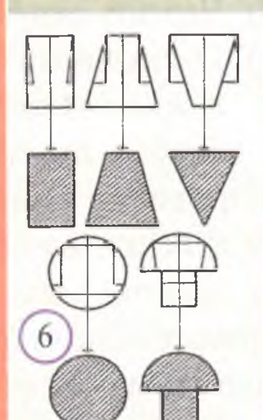
Важное значение в астрономии имеет угол между плоскостью эклиптики (плоскости, содержащей орбиту Земли) и плоскостью экватора небесной сферы. Он называется углом наклона экватора к эклиптике. Для его вычисления нужно выяснить направление северного полюса небесной сферы (очень близко к Полярной звезде) и вычислить максимальную высоту Солнца в день весеннего равноденствия (21 марта). В обсерватории Улугбека угол наклона экватора к эклиптике на основании высокоточных измерений был определен как 23°30′17″



ГЛАВА VI

ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ





52 ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ С ПОМОЩЬЮ ЦИРКУЛЯ И ЛИНЕЙКИ

1

Решение задач на построение с помощью только линейки и циркуля воспитывает способность к логической наблюдательности. Поэтому решение таких задач достигло в Древней Греции уровня искусства.

До сих пор геометрические построения мы выполняли с помощью различных инструментов. Например, с помощью линейки строились прямая, луч, отрезок, треугольник и другие фигуры. С помощью линейки и транспортира строились различные углы. А с помощью циркуля проводили окружности и дуги, с помощью угольника параллельные и перпендикулярные прямые.

Как установлено, многие геометрические фигуры можно строить с помощью односторонней линейки без шкалы (такую линейку мы называем простой) и циркуля (рис. 1). По этой причине, в геометрии специально выделены задачи на построение с помощью этих инструментов.

Имеются особые правила использования этих инструментов – при их помощи разрешается выполнять только следующие работы:

С помощью простой линейки:

1) Чертить любые прямые;
2) Чертить прямую, проходящую через заданную точку;
3) Чертить прямую, проходящую через две точки.

С помощью циркуля:

1) Чертить любую окружность;
2) Из данной точки как центра чертить окружность произвольного радиуса;
3) Чертить окружности данного радиуса из произвольно заданного центра;
4) Чертить окружность из данного центра с заданным отрезком как радиусом;
5) Откладывать отрезок, равный данному, на данной прямой от данной точки в каждом из двух направлений на прямой.

Любые другие построения надлежит сводить к этим действиям. Но не разрешается измерять длины отрезков с помощью шкалы, даже если она имеется на линейке, и откладывать отрезки известной длины на любой прямой (так как на простой линейке нет делений). Точно также, для построения параллельных прямых нельзя пользоваться двумя ребрами линейки (так как на простой линейке только одна сторона ровная).

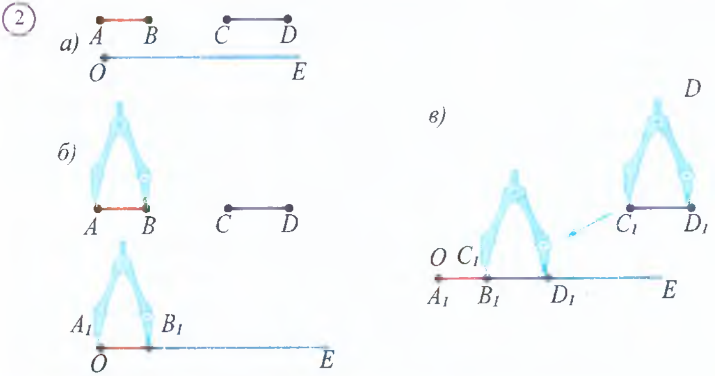
При построении требуется не только построить фигуру, но и указать метод построения, обосновать, что построенная фигура удовлетворяет заданным условиям, т. е. необходимо дать доказательство этого.

Задача. Даны отрезки AB и CD и луч OE (*рис. 2а*). С помощью циркуля на луче OE отложите отрезок равный $AB+CD$.

Построение: ***1-шаг.*** С помощью циркуля на луче OE отложим отрезок A_1B_1 равный отрезку AB (*рис. 2б*).

2-шаг. С помощью циркуля на луче B_1E отложим отрезок C_1D_1 равный отрезку CD (*рис. 2в*).

Тогда длина получившегося отрезка A_1D_1 будет равна длине отрезка $AB+CD$.



Упражнение. Пусть $AB>CD$. Постройте отрезок, равный отрезку $AB-CD$.

Вопросы, задачи и задания

1. Почему так важно решать задачи на построение?
2. Какие особенности имеются у задач на построение?
3. Какие фигуры можно начертить с помощью простой линейки?
4. Какие работы можно выполнять с помощью циркуля?
5. Разрешаются ли измерения при решении задач на построение?
6. На прямой даны точки A и B. На луче BA от точки B отложите отрезок BC так чтобы $BC=2AB$.
7. Пусть для точки, не принадлежащей окружности, наименьшее и наибольшее расстояния до окружности равны 2 *см* и 10 *см* соответственно. Найдите радиус окружности.

8*. Даны точки A и B. Пользуясь только циркулем постройте такую точку C, для которой $AC=3AB$.

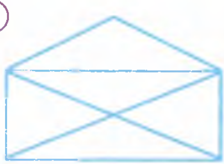
9. Даны отрезки, длины которых равны a и b. Постройте отрезки с длинами. а) $a+b$; б) $a-b$; в) $2a+3b$; г) $2a-b$.
10. Даны отрезки, длины которых равны 12 *см* и 5 *см*. Постройте отрезки с длинами а) 17 *см*; б) 7 *см*; в) 24 *см*; г) 22 *см*; д) 29 *см*.

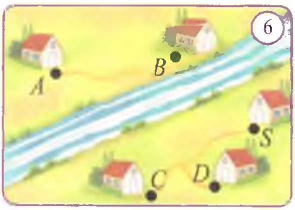
1


2


3


4


5




1. Нарисовав окружность, Сардор понял, что забыл отметить карандашом ее центр. Как назло, на бумаге не осталось и следа. Но он запомнил, что длина радиуса была 12 см. Можно ли, зная это, найти только с помощью циркуля центр начерченной окружности?
2. Разделите фигуру на рисунке 1 на 5 равных частей.
3. На рисунке 2 даны три квадрата, построенные с помощью 12 спичек. Не ломая эти 12 спичек, постройте из них а) два, б) четыре, в) 6 квадратов, используя все 12 спичек.
4. Расположите два равных равнобедренных прямоугольных треугольника (*рис. 3*) так, чтобы получить четыре равных равнобедренных прямоугольных треугольника и один квадрат.
5. Расположите два равных равносторонних треугольника (*рис. 4*) так, чтобы получить шесть равных равносторонних треугольников и один равносторонний шестиугольник.
6. Из а) 10; б) 11 одинаковых палочек постройте 3 равных квадрата.
7. Из 12 одинаковых палочек, не ломая их, постройте а) 4; б) 6 равных квадратов?
8. Обведите карандашом фигуру на рисунке 5, не проходя линию дважды и не отрывая карандаш от бумаги.
9. Вдоль реки расположены пять домов, три из них на одном берегу, а два на другом (*рис. 6*). Сколько мостиков нужно построить, чтобы каждый дом был связан с другими отдельной дорогой?

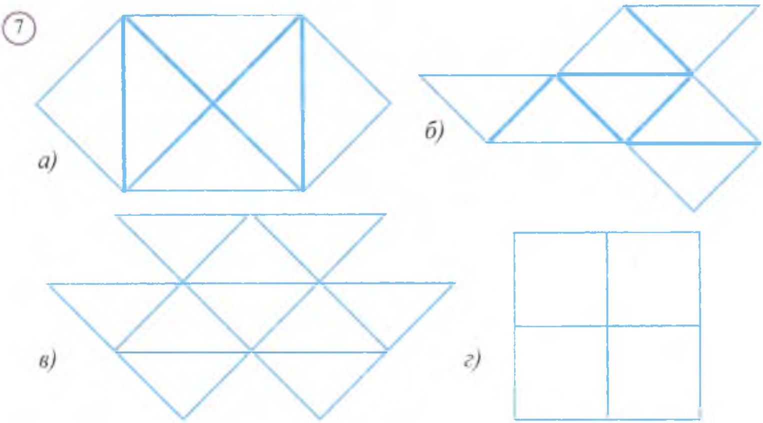
10. Представим себе, что человек это отрезок прямой. Когда его тень будет самой короткой?

11. Какая имеется связь между числом вершин и числом сторон многоугольника?

12. Разъясните, что число сторон открытой ломаной без самопересечений на один меньше числа его вершин.

13. Постройте такую ломаную с 12 сторонами, чтобы число ее вершин также равнялось 12.

14. ***Занимательная задача.*** Какую из фигур на рисунке можно обвести карандашом, не проходя линию дважды и не отрывая карандаш от бумаги?



15. Тема для обсуждения: является ли фигура на рисунке 7 ломаной? Подсчитайте сколько у нее сторон и сколько вершин?

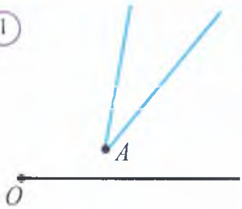
16. Тема для обсуждения: Можно ли при необходимости назвать равносторонний треугольник равнобедренным?

17. Может ли прямоугольный треугольник быть равнобедренным? А равносторонний? Почему вы так думаете?

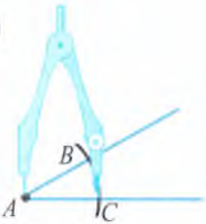
18. На сколько градусов в общей сложности повернется человек, если он будет двигаться вдоль площади в виде равностороннего треугольника и вернется в первоначальное положение? А если он будет двигаться по квадратной площади?

54 ПОСТРОЕНИЕ УГЛА, РАВНОГО ДАННОМУ

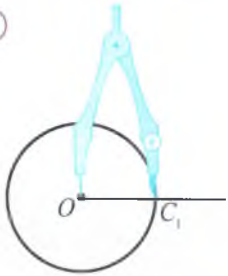
1



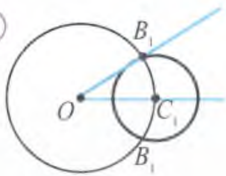
2



3



4



Задача 1. Дан угол A. От луча O (*рис. 1*) отложить угол, равный углу A.

Построение:

1-ый шаг. Начертим окружность произвольного радиуса с центром в точке A. Пусть эта окружность пересечет стороны угла A в точках B и C (*рис. 2*).

2-ой шаг. Из точки O как из центра радиусом, равным радиусу построенной окружности, начертим окружность (*рис. 3*). Точку пересечения этой окружности с лучом O обозначим через C_1.

3-ий шаг. Из точки C_1 как из центра радиусом BC начертим третью окружность (рис. 4). Одну из точек ее пересечения со второй окружностью, лежащую, например, в верхней полуплоскости обозначим B_1.

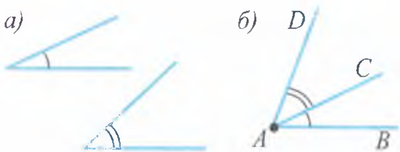
4-ый шаг. Проведем луч OB_1 (рис. 4). Полученный угол B_1OC_1 отложен от луча O и равен данному углу A.

Обоснование: Из построения углов BAC и B_1OC_1 на рисунках 2 и 4 имеем: $AB=OB_1$, $AC=OC_1$ и $BC=B_1C_1$.

По признаку ССС равенства треугольников $\Delta ABC = \Delta OB_1C_1$. В частности, $\angle B_1OC_1 = \angle A$.

Примечание: Эта задача имеет два решения в зависимости от того, в какой полуплоскости от прямой, содержащей луч O, выбрана точка B_1 .

5



Задача 2. Построить угол, равный сумме двух данных углов (*рис. 5а*).

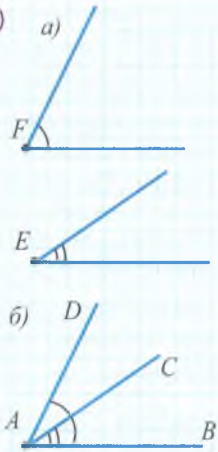
Построение: **1-ый шаг.** Вначале строим угол BAC, равный первому углу (*рис. 5б*).

2-ой шаг. От луча AC откладываем угол CAD, равный второму углу, так, чтобы точки B и D лежали в разных полуплоскостях относительно луча AC. Полученный угол BAD равен сумме данных углов.

Задача 3. Построить угол, равный разности двух данных углов.

Построение: Пусть заданы углы E и F, причем $\angle F > \angle E$ (*рис. 6а*). Построим луч AB. На луче AB отложим в одну и ту же полуплоскость соответственно углы $\angle BAC = \angle E$ и $\angle BAD = \angle F$ (*рис. 6*). Тогда $\angle CAD$ разность заданных углов.

6



Вопросы, задачи и задания

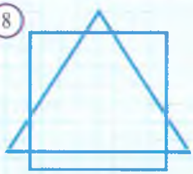
1. Даны углы а) 30°; б) 60°; в) 15°; г)120°; д) 45°. Постройте равные им углы, пользуясь простой линейкой и циркулем.
2. Даны углы $\angle A=\alpha$ и $\angle B=\beta$ $(\alpha>\beta)$. Постройте углы, равные: а) 2α; б) $\alpha-\beta$; в) $2\alpha+\beta$.
3. Даны углы 45° и 30°. Постройте углы, равные а) 15°; б) 75°; в) 105°; г) 120°.
4. Задан угол равный 30°. Постройте равный ему угол и некоторый луч. Отложите на этом луче построенный угол.
5. Постройте угол и луч. Отложите на этом луче данный угол.
6. Обоснуйте правильность построений в задаче 1.

Геометрические головоломки

7. Сколько четырехугольников на рисунке 7?
8. Обведите карандашом фигуру на рисунке 8, не проходя линию дважды и не отрывая карандаш от бумаги.
9. Постройте треугольник, проходящий через четыре точки на рисунке 9.
10. Сможете ли начертить ломаную линию, которая имеет 4 звена и проходит через все 9 точек, изображенных на рисунке 10?

7

8



9

10

55 ПОСТРОЕНИЕ БИССЕКТРИСЫ УГЛА

Пусть дан угол *A*, изображенный на рисунке 1. Для того чтобы разделить этот угол пополам, предлагается следующий способ:

Построение:

1-ый шаг. Чертим окружность произвольного радиуса с центром в точке *A* и точки пересечения окружности со сторонами угла обозначаем через *B* и *C*.

2-ой шаг. Строим, не меняя радиуса, две окружности с центрами в точках *B* и *C* (*рис. 2*). Точку пересечения этих окружностей обозначим через *D* (*рис. 3*).

3-ий шаг. Через точки *A* и *D* проводим луч *AD* (*рис. 4*). Луч AD – биссектриса данного угла.

Обоснование. В треугольниках *ABD* и *ACD*:

1) $AB = AC$ по построению;

2) $BD = CD$ по построению;

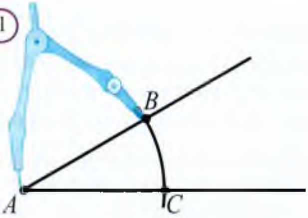
3) *AD* – общая сторона.

По признаку ССС равенства треугольников, $\Delta ABD = \Delta ACD$. В частности, $\angle BAD = \angle CAD$.

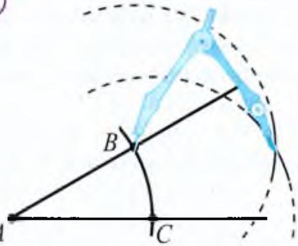
Задача. Разделить данный прямой угол на три равные части.

Решение: Пусть дан прямой угол *A*. Начертим окружность произвольного радиуса с центром в его вершине. Пусть окружность пересекает стороны прямого угла в точках *B* и *C*. Не меняя радиуса, начертим две окружности с центрами в точках *B* и *C*.

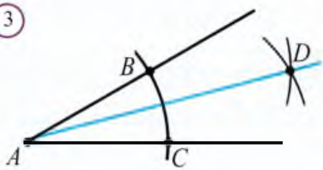
1



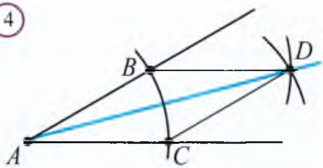
2



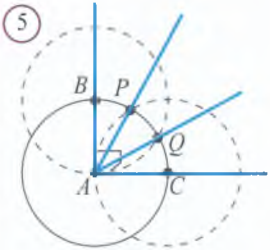
3



4



Точки пересечения этих окружностей с первой окружностью, лежащие во внутренней области прямого угла, обозначим через *P* и *Q*. Проведем лучи *AP* и *AQ*. Эти лучи разделят данный прямой угол на три равных угла. Самостоятельно обоснуйте это построение.



Примечание. *Задача деления данного угла на три равных угла (трисекции угла) с помощью простой линейки и циркуля была одной из знаменитых задач древности, над решением которой ломали головы многие ученые. Только в XVIII веке было доказано, что произвольно выбранный угол нельзя разделить на три равных угла. Таков, например, угол 60°. Для точного решения задачи трисекции угла нужно применить другие инструменты.*

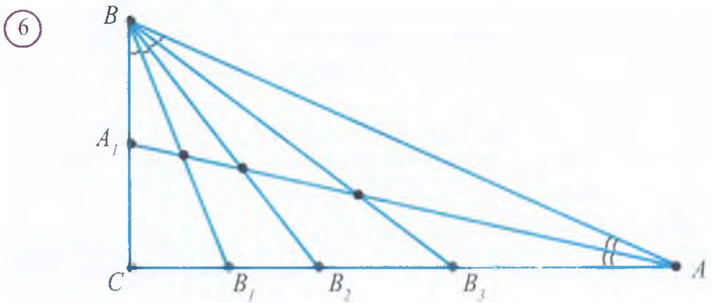
Вопросы, задачи и задания

1. С помощью простой линейки и циркуля разделите пополам углы: а) 90°; б) 60°; в) 30°.
2. Начертите угол и разделите его на две равные части.
3. Начертите угол и разделите его на четыре равных угла.
4. Угол 45° разделите на три равных угла.
5. Постройте прямоугольный треугольник по большей стороне и острому углу.
6. Дан угол 36°. Постройте с помощью простой линейки и циркуля угол 99°?

7* Дан угол 54°. Разделите с помощью простой линейки и циркуля этот угол на три равных угла.

8. Начертите треугольник. Постройте его биссектрису. Какое свойство применяется?
9. Постройте смежные углы. Постройте их биссектрисы. Измерьте с помощью транспортира угол между построенными биссектрисами.

10* В прямоугольном треугольнике $\angle A=30°$, $\angle B=60°$. Постройте отрезок AA_1, делящий угол A пополам и отрезки BB_1, BB_2, BB_3, делящие угол B на четыре равные части. В результате получится рисунок 6. Сколько равнобедренных и сколько прямоугольных треугольников можно увидеть на этом рисунке?

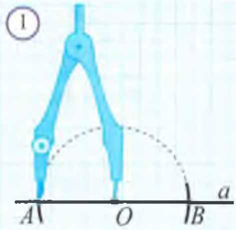


56 ПОСТРОЕНИЕ ПРЯМОЙ, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОЙ К ДАННОЙ ПРЯМОЙ. ДЕЛЕНИЕ ОТРЕЗКА ПОПОЛАМ

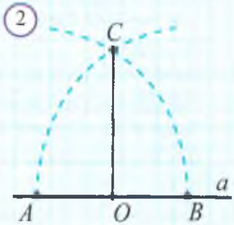
Задача 1. Построить перпендикуляр к данной прямой a, проходящий через ее точку O.

Построение:

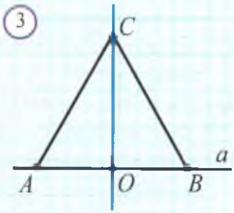
1-ый шаг. Построим окружность произвольного радиуса с центром в точке O. Пусть она пересекает данную прямую в точках A и B (*рис. 1*).



2-ой шаг. Из точек A и B как из центров проведем окружности с радиусом AB (*рис. 2*). Одну из точек пересечения этих окружностей обозначим через C.



3-ий шаг. Построим прямую OC (*рис. 3*).



Прямая OC будет прямой, перпендикулярной прямой a и проходящей через ее точку O.

Обоснование. Рассмотрим треугольники AOC и BOC. Для них, по построению:

1. $AO=BO$;
2. $AC=BC$;
3. CO – общая сторона.

Значит, по признаку ССС равенства треугольников $\Delta AOC=\Delta BOC$. В этом случае, $\angle AOC=\angle BOC$. Но $\angle AOC+\angle BOC=180°$. Отсюда следует, что $\angle AOC=\angle BOC=90°$.

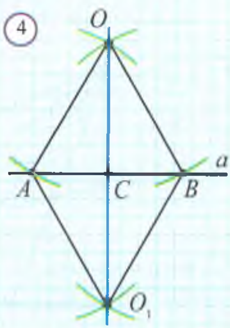
Итак, действительно, $OC\perp a$.

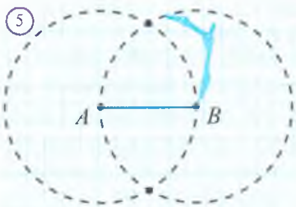
Задача 2. Построить прямую, перпендикулярную данной прямой a и проходящую через точку O, не лежащую на прямой a.

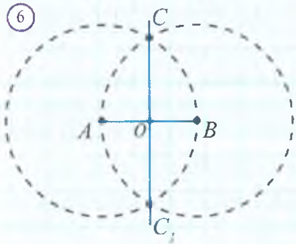
Построение:

1-ый шаг. Построим окружность произвольного радиуса с центром в точке O. Пусть она пересечет данную прямую в точках A и B (*рис. 4*).

2-ой шаг. Из точек A и B как из центров построим две окружности с радиусами, равными радиусу первой окружности. Обозначим одну из точек пересечения этих двух окружностей через O, вторую через O_1 (*рис. 4*).







3-ий шаг. Построим прямую, проходящую через точки O и O_1. Прямая OO_1 перпендикулярна данной прямой a и проходит через точку O, не лежащую на данной прямой.

Обоснование проведите самостоятельно.

Из решения этой задачи следует, что через точку, не лежащую на данной прямой a, можно провести прямую, перпендикулярную к прямой a. Отсюда и из теоремы урока 16 вытекает справедливость следующей теоремы.

Теорема. **Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести единственную прямую, перпендикулярную данной.**

Задача 3. Разделить данный отрезок на два равных отрезка.

Построение:

Пусть дан отрезок AB. Для нахождения середины этого отрезка проводим следующее построение:

1-ый шаг. Начертим две окружности с центрами в точках A и B и радиусом AB (рис. 5);

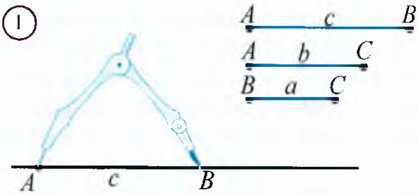
2-ой шаг. Соединим точки пересечения окружностей C и C_1 (рис. 6). Точка пересечения прямой CC_1 и отрезка AB будет серединой данного отрезка.

Вопросы, задачи и задания

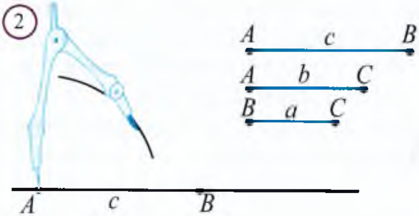
1. Какой способ деления отрезка пополам вы знаете? Начертите отрезок и разделите его на два равных отрезка.
2. Как можно построить прямой угол?
3.* Разделите отрезок пополам, выполняя построения только в одной полуплоскости.
4. Разделите данный отрезок пополам, пользуясь только угольником.
5. Постройте равнобедренный прямоугольный треугольник по гипотенузе.
6. Постройте равнобедренный треугольник по основанию и опущенной на него высоте.
7. Можно ли построить серединный перпендикуляр к отрезку AB, не имея возможности найти середину отрезка?
8. Разделите данный отрезок на четыре равных отрезка.
9. Начертите треугольник. Постройте его высоты.
10. Постройте медианы данного треугольника.
11.* Найдите точку, равноудаленную от точек A и B и лежащую на прямой a.

57 ПОСТРОЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКА ПО ТРЕМ ДАННЫМ ЕГО СТОРОНАМ

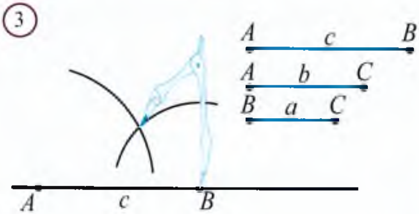
1



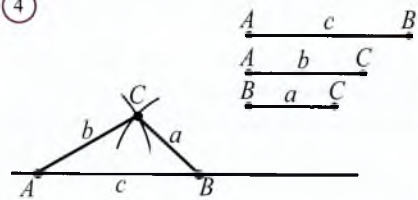
2



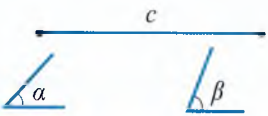
3



4



5



Пусть даны три отрезка с длинами, соответственно равными a, b и c (*рис. 1*) и пусть c наибольшая. Для того чтобы построить треугольник ABC со сторонами $AB=c$, $BC=a$ и $AC=b$, выберем следующий путь.

1-ый шаг. Чертим произвольную прямую. На прямой циркулем откладывается отрезок AB, длина которого равна c (*рис. 2*).

2-ой шаг. Так как длина отрезка $AC=b$, строим окружность с центром в точке A и радиусом b (*рис. 3*).

3-ий шаг. Так как длина отрезка $BC=a$, строим окружность с центром в точке B и радиусом a (*рис. 4*).

4-ый шаг. Точку C пересечения окружностей соединяем с точками A и B. Стороны построенного треугольника ABC равны a, b и c.

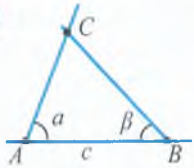
Анализ. Из построения видно, что если окружности, построенные на 2-ом и 3-ем шагах, пересекутся, то решение существует. Для этого нужно, чтобы $a+b>c$.

Докажите самостоятельно, что длины сторон полученного треугольника ABC действительно равны a, b и c.

1-ая задача. Постройте треугольник по стороне и прилежащим к нему углам.

Решение: Пусть даны отрезок c и углы α и β (*рис. 5*). Начертим произвольную прямую. Отложим на ней отрезок $AB = c$. Отложим на луче AB угол α, а на луче BA угол β (*рис. 6*). Обозначим точку пересечения вторых сторон буквой C. Треугольник ABC и будет искомым треугольником. Это утверждение обоснуйте самостоятельно.

6



Вопросы, задачи и задания

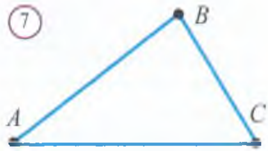
1. Можно ли построить треугольник с помощью отрезков произвольной длины?
2. Постройте треугольник со сторонами $a=3$ *см*, $b=8$ *см* и $c=9$ *см*.
3. а) Можно ли построить треугольник со сторонами $a=3$ *см*, $b=4$ *см* и $c=7$ *см*?

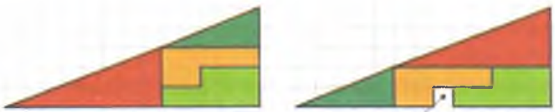
   б) Какому условию должны удовлетворять длины отрезков a, b и c для того чтобы быть длинами сторон треугольника?
4. Постройте прямоугольный треугольник по двум катетам.
5. Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и катету.
6. Начертите произвольную прямую. Постройте треугольник, равный треугольнику ABC, изображенному на рисунке 7, так чтобы одна его сторона лежала на этой прямой.

7* Даны отрезки с длинами $a+b$, $b+c$ и $a+c$. Постройте треугольник со сторонами a, b, c.

8. Постройте треугольник по двум сторонам и углу между ними.
9. Постройте треугольник по стороне и прилежащим к ней углам.

7





10. Оба треугольника состоят из одинаковых частей. Но почему же у треугольника с левой стороны появилось пустое место?

Дополнительные задания для продвинутых учеников.

1. Познакомьтесь со страницами главы, соответствующей данной, в электронной версии учебника «Геометрия-7». Проверьте свои знания, выполнив данные задания и решив тесты в интерактивных анимационных приложениях к темам упомянутой главы.

2. Кроме того, найдите приведенные на странице 141 материалы из Интернет-ресурсов, относящиеся к упомянутой главе и изучите их.

58 РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

1. Постройте треугольник по трем сторонам a, b, c, где: а) a=2 *см*, b=3 *см*, c=4 *см*; б) a=3 *см*, b=4 *см*, c=5 *см*.
2. Точки A, B, C лежат на одной прямой, а точка O не лежит на этой прямой. Будут ли треугольники AOB и BOC с основаниями AB, BC равнобедренными? Обоснуйте ответ.
3. Дан треугольник ABC. Постройте другой равный ему треугольник ABD.
4. Постройте треугольник ABC по следующим данным:
   а) AB=5 *см*, AC=6 *см*, $\angle A=40°$;
   б) AB=4 *см*, $\angle A=45°$, $\angle B=60°$.
5. Постройте треугольник по двум сторонам и углу, лежащему против большей стороны:
   а) a=6 *см*, b=4 *см*, $\alpha=70°$; б) a=4 *см*, b=6 *см*, $\beta=100°$.
6. Постройте равнобедренный треугольник по боковой стороне и углу при основании.
7. Разделите угол на четыре равные части.
8. Постройте углы 60° и 30°.
9. Дан треугольник. Постройте его медианы.
10. Постройте треугольник по двум сторонам и медиане, проведенной к одной из этих сторон.
11. Дан треугольник. Постройте его высоты.
12. Постройте треугольник по гипотенузе и одному из катетов.
13. Постройте равнобедренный треугольник по боковой стороне и высоте, проведенной к основанию.
14. Постройте треугольник по двум сторонам и высоте, проведенной к одной из этих сторон.
15. На данной прямой найдите точку, которая находится на заданном расстоянии от другой заданной прямой.
16. Даны три точки A, B, C. Найдите точку X, равноудаленную от точек A и B, и расположенную на заданном расстоянии от точки C.
17. Через каждую из вершин данного треугольника проведены прямые, перпендикулярные биссектрисам этого треугольника. Эти прямые вместе со сторонами треугольника образуют три треугольника. Докажите, что углы этих треугольников соответственно равны.
18. Докажите, что если медиана и высота треугольника, проведенная из одной из его вершин, делит угол на три равные части, то этот треугольник – прямоугольный.
19. Угол при вершине равнобедренного треугольника ABC ($AB=BC$) равен 75°, AK – биссектриса треугольника, BK=10 *см*. Найдите расстояние от точки K до основания AC.

20. Угол при вершине равнобедренного треугольника ABC ($AB=BC$) равен 120°, CK – биссектриса, $AK=14$ см. Найдите расстояние от точки K до прямой AC.

21. Даны отрезки $a+b$, $b+c$ и $a+c$. Постройте отрезки a, b, c.

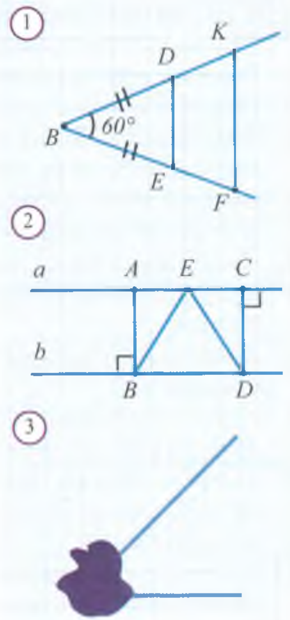
22. Постройте прямоугольный треугольник по двум катетам.

23. Проведите прямую и отметьте точку не лежащую на ней. Постройте прямую, проходящую через эту точку и перпендикулярную данной прямой.

24. Проведите прямую и отметьте точку не лежащую на ней. Постройте прямую, проходящую через эту точку и параллельную данной прямой.

25. На рисунке 1 $\angle B=60°$, $BD=BE$, $FK \| DE$. Докажите, что треугольники BDE и BKF равносторонние.

26. Прямые a и b на рисунке 2 параллельны. $AB \perp b$, $DC \perp a$, $AE=EC$. Докажите, что треугольник BED равносторонний.



Геометрическая головоломка

В рукописи отца Шохджахон нашел чертеж, изображенный на рисунке 6. К сожалению, на этом рисунке была большая чернильная клякса. Сумеет ли Шохджахон начертить биссектрису этого угла?

К титульному листу главы V на странице 123

1. На рисунке 1 представлен процесс черчения геометрических фигур в Древнем Египте. Какими инструментами пользуются чертежники и какую геометрическую фигуру они чертят?
2. На рисунке 2 представлены изделия народного промысла. Какие геометрические фигуры положены в основу этих изделий.
3. Постройте самостоятельно геометрические фигуры на рисунке 3.
4. Какие инструменты были использованы при построении чертежа двери на рисунке 4? Постройте самостоятельно чертеж двери.
5. Какими инструментами пользуются на практике землемеры (*рис. 5*)?
6. Название формы кроя одежды в зависимости от того, на какую геометрическую фигуру она похожа. Например, говорят: «Пальто квадратной формы». Назовите формы кроя одежды на рисунке 6 и начертите эти фигуры.

59 ПОВТОРЕНИЕ ГЛАВЫ

1. Постройте некоторый угол. Постройте угол, равный данному.
2. Постройте некоторый угол. Постройте его биссектрису.
3. Начертите прямую и отметьте точку, не лежащую на ней. Постройте прямую, проходящую через эту точку и перпендикулярную этой прямой.
4. Начертите прямую и обозначьте точку, не лежащую на ней. Постройте прямую, проходящую через эту точку и параллельную этой прямой.
5. Начертите некоторый отрезок и разделите его пополам.
6. Постройте три отрезка. Постройте треугольник со сторонами, равными этим отрезкам.
7. Начертите некоторый треугольник. Постройте одну а) медиану; б) биссектрису, в) высоту.
8. Точки A, B, C лежат на одной прямой. Найдите длину отрезка BC, если AB=2,7 *м* и AC=3,2 *м*. Сколько решений имеет задача?
9. На отрезке MK взята произвольная точка P. Точки N и L середины отрезков MP и PK соответственно. Докажите, что длина отрезка NL равна половине длины отрезка MK.
10. На прямой b отмечены точки A, E и F. Найдите длины отрезков AE и EF, если AF=8 и AE+AF=14. Какая из трех точек лежит между двумя другими?
11. На луче AB в разные полуплоскости отложены углы BAC и BAD. Найдите угол CAD, если:

    а) $\angle BAC=80°$, $\angle BAD=170°$; б) $\angle BAC=87°$, $\angle BAD=98°$

    в) $\angle BAC=140°$, $\angle BAD=30°$; г) $\angle BAC=60°$, $\angle BAD=70°$.
12. В той же полуплоскости, где лежит общая сторона OB смежных углов AOB и COB проведен луч O. Докажите, что луч OD пересечется или с отрезком AB, или с отрезком BC. Какой отрезок пересечет луч OD, если угол AOD будет меньше (больше) угла AOB? Разъясните свой ответ.
13. Треугольники MNP и SKT равны, в частности $MP=ST$, $\angle M=\angle S$, MN=17 *дм*, $\angle K=70°$.

    а) Найдите угол N и отрезок SK.

    б) Может ли периметр треугольника SKT быть больше периметра треугольника MNP?
14. На медиане CM треугольника ABC с основанием AB взята точка O. Докажите, что треугольник AOB равносторонний.
15. Точки C и D расположены по разные стороны от прямой AB и $AD=AC$, $BD=BC$. Докажите, что луч AB является биссектрисой угла DAC.

16. Постройте два взаимно перпендикулярных диаметра окружности.

17. а) Постройте две взаимно перпендикулярные хорды окружности.

б) Постройте окружность по заданному диаметру.

18. Докажите, что треугольники равны, если равны соответственно по одному углу, биссектрисы, проведенные из этих углов и прилежащие к этим углам стороны.

19. Докажите, что в равных треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$: а) равны медианы, проведенные из вершин A и A_1; б) равны биссектрисы, проведенные из вершин B и B_1.

20. Отрезок AB является общим основанием равнобедренных треугольников ABC и ABC_1. Докажите равенство треугольников ACC_1 и BCC_1.

21. Треугольник $A_1B_1C_1$ равен треугольнику ABC, в частности, $B_1C_1=AC$, $A_1C_1=AB$.

а) Найдите угол C и отрезок B_1A_1, если $\angle B_1=60°$, $BC=8$ *м*.

б) Может ли периметр треугольника $A_1B_1C_1$ равняться сумме $2AC+3B_1C_1$, если все стороны треугольника ABC равны?

22. Один из углов, образованный при пересечении двух прямых, в 8 раз меньше суммы остальных. Найдите величину каждого из этих углов.

23. На прямой a отмечены точки A и B. К прямой a в одну полуплоскость соответственно отложены углы CAB и DBA. В каком из следующих случаев прямые CA и DB будут параллельны:

а) оба угла острые;

б) оба угла тупые;

в) оба угла прямые;

г) один острый, а другой тупой?

24. Концы отрезка AB лежат на параллельных прямых a и b, точка O – середина отрезка AB. Докажите, что любой отрезок с концами на прямых a и b, проходящий через точку O, делится в этой точке пополам.

25. Биссектрисы AK и BM треугольника ABC пересекаются в точке O. Найдите угол C треугольника, если $\angle KOB=70°$.

26 Высоты AK и BM треугольника ABC пересекаются в точке O. Найдите угол AOB треугольника, если углы A и B соответственно равны 72° и 60°.

27. Точки D и E лежат соответственно на сторонах AB и BC треугольника ABC, причем $AD=CE$ и $AE=CD$. Докажите, что треугольник ABC равносторонний.

28. Точки F и M лежат соответственно на сторонах AB и BC треугольника ABC, причем $CF=AM$, $\angle MAC=\angle FCA$. Докажите, что треугольник ABC равносторонний.

60 6-АЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

Контрольная работа состоит из двух частей: в первой части 3 задачи из приведенных ниже (или им подобные задачи), во второй 5 тестов, подобных ниже.

I. 5 теоретических тестов.

II. 3 задачи, подобные приведенным ниже (задача 4 для желающих получить оценку "отлично").

1. Постройте угол, равный данному углу в 120°, с помощью циркуля и линейки.
2. Постройте треугольник со сторонами a= 5 *см*, b= 6 *см* и c=7 *см*.
3. В треугольнике, построенном в задаче 2, проведите медиану к стороне a.
4. Постройте треугольник по основанию, одной стороне и высоте, опущенной на основание.

Тесты.

1. Для каких значений длин отрезков a, b и c, приведенных ниже, нельзя построить треугольник, имеющий эти отрезки своими сторонами?
   А) $a=1, b=2, c=3$; Б) $a=2, b=3, c=4$;
   В) $a=3, b=4, c=5$; Г) $a=6, b=4, c=3$.

2. Какими инструментами можно пользоваться при решении задач на построение?
   А) Транспортир; Б) Транспортир, линейка;
   В) Циркуль, линейка; Г) Циркуль, транспортир.

3. Какие задачи можно решать с помощью линейки при выполнении геометрических построений?
   А) Измерять отрезки; Б) Чертить отрезки, прямые линии;
   В) Приближенно строить прямую, проходящую через данную точку и перпендикулярную данной прямой;
   Г) Находить середину отрезка измерением его длины.

4. Определите вид треугольника, если сумма любых двух его сторон равна 10 см.
   А) равносторонний; Б) тупоугольный;
   В) прямоугольный; Г) невозможно определить.

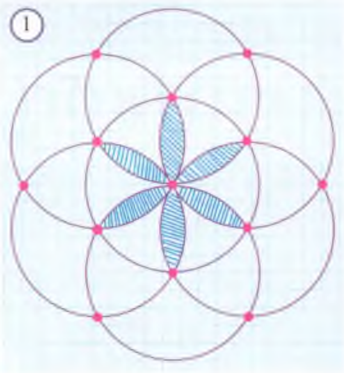
5. Найдите наибольшую сторону треугольника, если его периметр больше соответствующих сторон на 14 *см*, 16 *см* и 24 *см*.
   А) 12 *см;* Б) 13 *см;* В) 15 *см;* Г) 16 *см.*

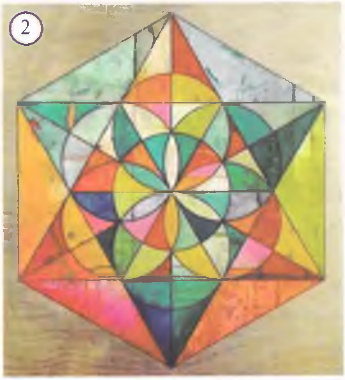
6. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB=BC$) BH – высота. Найдите высоту BH, если периметры треугольников ABC и BHC соответственно равны 48 см и 32 см.
   А) 4 *см;* Б) 6 *см;* В) 5 *см;* Г) 7 *см.*

Дополнительный материал для развития практической компетенции

1. Начертите фигуру, изображенную на рисунке 1. Радиусы окружности равны, и данные точки являются центрами изображенных окружностей.

2. Начертите фигуру, изображенную на рисунке 2 самостоятельно.

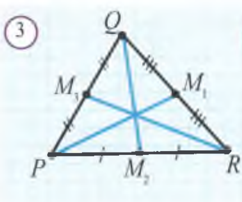


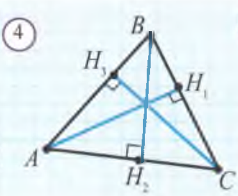


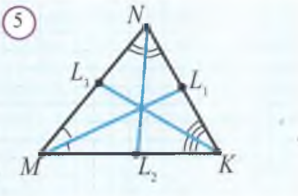
Геометрические исследования

1. Начертите произвольный треугольник. Проведите медианы к каждой стороне (*Рис. 3*). Что вы заметили? Повторите опыт еще на двух треугольниках и постарайтесь выразить свойство в виде предположения.
2. Начертите произвольный остроугольный треугольник. Пользуясь угольником, проведите высоты к каждой стороне (*Рис. 4*). Что вы заметили? Повторите опыт еще на двух треугольниках и постарайтесь выразить свойство в виде предположения.
3. Начертите произвольный остроугольный треугольник. Пользуясь транспортиром, проведите биссектрисы к каждому углу (*Рис. 5*). Что вы заметили? Повторите опыт еще на двух треугольниках и постарайтесь выразить свойство в виде предположения.

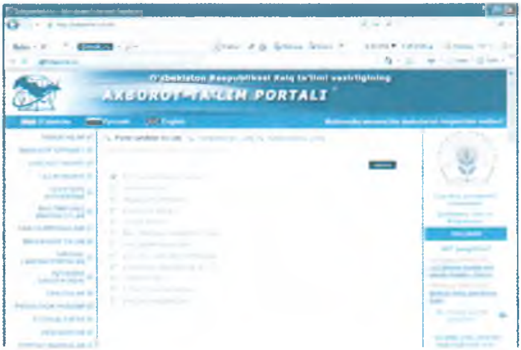
Можем ли мы считать теоремой свойства треугольника, найденные в результате проведенных опытов? Почему?







Сокровищница математических задач



На веб страницах интернета вы можете найти последние новости мира математики, электронные учебники, хранящиеся в электронных библиотеках. Кроме того, вы можете ознакомиться с различными теоретическими материалами, методическими рекомендациями, бесчисленными задачами, примерами и их решениями, информацией о различных математических соревнованиях, проводимых в разных странах, о задачах, заданных на этих соревнованиях, а также их решениях.

В частности, на портале Народного образования www.uzedu.uz, www.eduportal.uz мы рекомендуем просмотреть предлагаемую информацию по геометрии.

Ниже представлеы адреса ряда информационных ресурсов:

www.edu.uz – информационно-образовательный портал (на узбекском, русском и узбекском языках);

www.pedagog.uz – сайт повышения квалификации специалистов (на узбекском и русском языках);

www.ixl.com/math/geometry – математический образовательный портал США (на английском языке);

www.school.edu.ru – общеобразовательный портал (на русском языке);

www.allbest.ru – электронная библиотека интернет ресурсов (на русском языке);

www.schulen-ans-netz.de – сайт «Интернет-Школы» в Германии (на немецком языке);

www.studienkreis.de – сайт образовательных кружков Германии (на немецком языке);

www.educasource.education.fr – сайт образования во Франции (на французском языке);

www.educmath.inrp.fr – цифровые ресурсы математического образования во Франции (на французском языке);

http://mat-game.narod.ru/ – математическая гимнастика. Математические задачи и головоломки (на русском языке);

http://mathproblem.narod.ru/ – математические кружки, школы и олимпиады (на русском языке);

http://mathtest.narod.ru/ – математические тесты (на русском языке);

http://www.sch57.msk.ru/collect/smogl.htm – материалы по истории математики (на русском языке);

http://www.exponenta.ru – сайт математического образования (на русском языке);

http://zadachi.mccme.ru – сайт задач по геометрии (на русском языке);

http://www.math-on-line.com – интересные математические задачи (на русском языке).

ГЛАВА VII

ПОВТОРЕНИЕ

1

2

3

4

5

6

7

61 СТУПЕНИ РЕШЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

При решении геометрических задач следует обратить внимание на следующее:

1. Хорошо знать и помнить основные понятия геометрии и их свойства.
2. Владеть методами доказательства теорем о свойствах различных геометрических фигур.
3. Понимать смысл данной геометрической задачи.

Обычно процесс решения геометрической задачи складывается из следующих ступеней:

1-ая ступень. ***Понять задачу.*** На этой ступени разделяют содержание задачи на условие и заключение. Что дано, что надо найти, доказать или построить. Строится чертеж, соответствующий задаче. Целесообразно построение большого и точного чертежа. Все данные наносятся на чертеж.

2-ая ступень. ***Планирование.*** На этой ступени выбирается метод решения задачи. Определяется, какие дополнительные сведения необходимы для его применения. Выполняются вспомогательные построения.

3-ая ступень. ***Решение.*** На этой ступени задача непосредственно решается на основе данного плана.

4-ая ступень. ***Проверка.*** На этой ступени проверяется найденное решение задачи. Критически анализируется процесс решения задачи. Если обнаруживается ошибка, то она исправляется. Если нет возможности исправления, возвращаются к начальной ступени решения задачи и вся работа выполняется заново.

**Для того чтобы научиться решать задачи,
надо побольше их решать!**

**Начертить правильный чертеж
к задаче – это значит наполовину решить задачу.**

В зависимости от постановки и содержания, геометрические задачи можно разделить на три категории:

1. Вычислительные задачи;
2. Задачи на доказательство;
3. Задачи на построение.

Разумеется, решение задач – это не только нахождение правильного ответа. При решении задач необходимо использовать известные свойства, теоремы и их следствия, знать как использовать различные методы решения.

Покажем, как это делается на примере.

Задача. Доказать, что треугольник с вершинами в серединах сторон равностороннего треугольника также является равносторонним.

1. ***Ступень понимания задачи.***

В соответствии с данными задачи построим чертеж (*рис. 1*).

ΔABC – равносторонний, K – середина стороны AB, N – середина стороны BC, L – середина стороны AC	$\Rightarrow$	ΔKNL – равносторонний

2. Ступень ***планирования решения.*** Будем использовать свойства равностороннего треугольника и признак СУС равенства треугольников.

3. Ступень ***решения.*** По условию,

$LA = AK = KB = BN = NC = CL$ и $\angle A = \angle B = \angle C = 60°$. Тогда стороны AL, AK и угол A треугольника LAK равны сторонам BK, BN и углу B треугольника KBN, а также сторонам CN, CL и углу C треугольника NCL соответственно.

Значит, $\Delta LAK = \Delta KBN = \Delta NCL$ и третьи стороны этих треугольников также равны: $KL = KN = NL$.

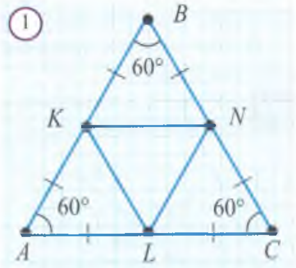
Итак, ΔKNL – равносторонний.

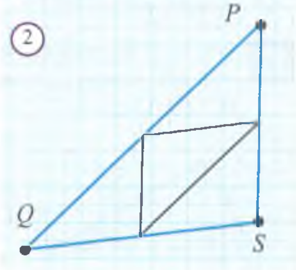
4. Ступень ***проверки.***

Будет ли теорема верной и для равнобедренных треугольников?

Упражнение. Докажите данное предположение.

Появляется закономерный вопрос: а если треугольник будет разносторонний?





Упражнение. Покажите, что, если соединить отрезками середины сторон треугольника, получится четыре равных треугольника (*рис. 2*).

Вопросы, задачи и задания

1. Перечислите ступени решения задачи.
2. Назовите различные виды геометрических задач.

Разбейте на ступени решение задач на следующих страницах учебника:

3. Стр. 23, задача 7.
4. Стр. 45, задача 5.
5. Стр. 72, задача 7.
6. Стр. 85, задача 6.
7. Стр. 93, задача 8.
8. Стр. 93, задача 9.
9. Стр. 117, задача 5.
10. Стр. 118, задача 10.
11. Стр. 138, задача 8.

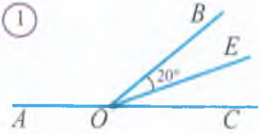
ЗАДАЧИ НА ВЫЧИСЛЕНИЕ

Задачи на вычисления похожи на задачи из арифметики и алгебры. С помощью различных геометрических формул над заданными числовыми величинами выполняют вычислительные работы и находят искомую.

В этих задачах правильный чертеж и нужные обозначения значительно облегчают работу.

Задача 1. Биссектриса одного из двух смежных углов образует угол 20° с одной из сторон второго угла. Найдите этот угол.

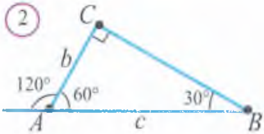
1



Решение. Построим чертеж, соответствующий условию задачи (*рис. 1*). Очевидно, что биссектриса OE является биссектрисой острого угла. Значит, $\angle BOC=2\cdot20^\circ=40^\circ$, $\angle AOB=180^\circ-40^\circ=140^\circ$.

Задача 2. В прямоугольном треугольнике ABC угол $\angle C$ – прямой, внешний угол при вершине A равен 120°. Найдите гипотенузу треугольника, если $AC+AB=18$ *см*.

2

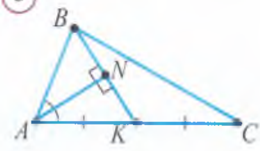


Решение. Построим чертеж в соответствии с условием задачи (*рис. 2*). По определению внешнего угла треугольника, находим $\angle A=180^\circ-\ -120^\circ=60^\circ$, $\angle B=90^\circ-\angle A=30^\circ$. $AC=b$, $AB=c$. Тогда $b+c=18$. Так как по свойству прямоугольного треугольника с острым углом 30°, катет, противолежащий этому углу, равен половине гипотенузы, находим, что $c=2b$. Откуда $b+c=b+2b=18$, т. е. $b=6$. Тогда $c=12$. ***Ответ:*** 12 *см*.

Задача 3. В треугольнике ABC сторона $AB=1$, биссектриса угла А перпендикулярна медиане, проведенной из вершины B. Найдите периметр треугольника, если длина стороны BC выражается целым числом.

Решение. Отобразим условие задачи на чертеже (*рис. 3*): $AK=KC$, $AN\perp BK$. Имеет место равенство $\Delta ANB=\Delta ANK$, так как катет AN – общий и прилежащие к катету углы равны (признак КУ). Откуда $AB=AK=KC=1$, т. е. $AC=1+1=2$.

3



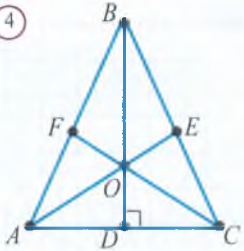
$BC=x$ – целое число и по неравенству треугольника $2+1>x$ и $x+1>2$, или $x<3$ и $x>1$, т.е. $1<x<3$. Между числами 1 и 3 заключено единственное целое число: 2. Значит, $BC=2$ и $P_{ABC}=1+2+2=5$.

Ответ: 5

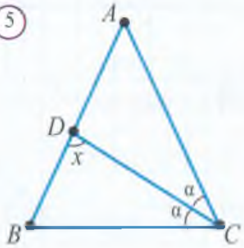
Вопросы, задачи и задания

1. Отрезок AB разбит на части отрезками, длины которых относятся как 1:2:3:4 и которые следуют в том же порядке. Найдите длину отрезка AB, если расстояние между серединами крайних отрезков равно 15 *см*.
2. Из вершины угла ABC=160° проведены лучи BO и BE. Найдите угол OBE, если луч BO делит данный угол пополам, а луч BE делит его в отношении 3:5.
3. Угол AOB разбит лучом OC на два угла, один из которых больше второго на 30°. Найдите угол между биссектрисой данного угла и лучом OC.
4. Угол при основании равнобедренного треугольника равен 30°. Найдите угол между высотами, опущенными на боковые стороны этого треугольника.
5. Один из внешних углов треугольника равен 100°, а несмежные с ним углы относятся как 2:3. Найдите углы треугольника.
6. Точки A, B, C, D лежат в указанном порядке на прямой и AB=BC=1, CD=2. Точка K расположена на луче BC и делит отрезки BC и AD в одном и том же отношении: BK:KC=AK:KD. Найдите это отношение.
7. Угол, полученный при пересечении двух биссектрис треугольника, равен 128°. Найдите третий угол треугольника.
8. Угол при вершине равнобедренного треугольника равен 96°. Найдите острый угол, под которым пересекаются биссектрисы углов при основании треугольника.
9. В прямоугольном треугольнике биссектриса и высота, исходящие из вершины прямого угла образуют угол, равный 24°. Найдити остальные углы треугольника.
10. Пусть AB=BC, $\angle ABC$=50°, AE и FC – биссектрисы на рисунке 4. Найдите $\angle AOB$ и $\angle EOC$.
11. Найдите угол x, если AB=AC, AD=DC на рисунке 5.
12. Найдите угол x, если AB=AC, BD=BC на рисунке 6.

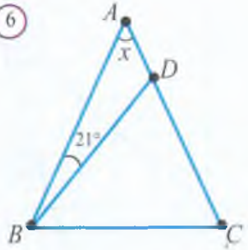
4



5



6

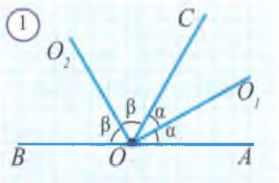


63 ЗАДАЧИ НА ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Задачи на доказательство сами по себе являются небольшими теоремами. Рассмотрим в качестве примера следующую задачу.

Задача 1. **Докажите, что биссектрисы смежных углов взаимно перпендикулярны.**

$\angle AOC$ и $\angle BOC$ — *смежные углы*, OO_1 и OO_2 – биссектрисы (*рис. 1*). $\Rightarrow$ $OO_1 \perp OO_2$.

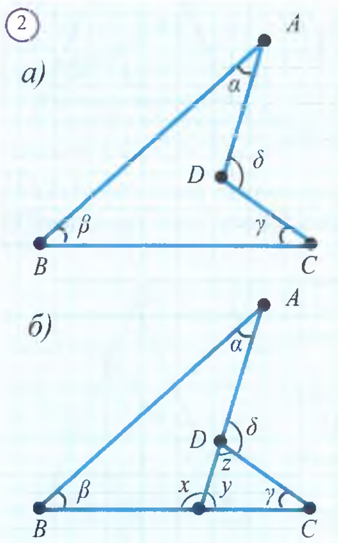


Доказательство. Обозначим углы, на которые биссектрисы OO_1 и OO_2 делят углы через α и β (*рис.1*). Тогда, $2\alpha+2\beta=180°$, или $\alpha+\beta=90°$

$$\angle O_1OO_2=\alpha+\beta=90°.$$

Значит, $OO_1 \perp OO_2$. Что и требовалось доказать.

Задача 2. Докажите, что в четырехугольнике $ABCD$ изображенном на рисунке 2а $\angle\delta=\angle\alpha+\angle\beta+\angle\gamma$.



Доказательство. Продолжим сторону AD и обозначим точку пересечения прямой AD со стороной BC через E. Обозначим углы (*рис. 2б*). Известно, что $\alpha+\beta+x=180°$ и $y+z+\gamma=180°$. Сложив эти равенства, приходим к равенству,

$$\alpha+\beta+\gamma+x+y+z=360°.$$

По свойству смежных углов, $x+y=180°$, поэтому

$$\alpha+\beta+\gamma+180°+z=360°,$$

или

$$\alpha+\beta+\gamma=180°-z=\angle D,$$

следовательно

$$\angle D=\alpha+\beta+\gamma=\angle A+\angle B+\angle C.$$

Равенство доказано.

Мы уже говорили о том, как важно, чтобы геометрические предложения были точными и емкими. При решении математических задач эти два требования тоже очень важны. Поэтому после решения задачи следует провести его анализ, задать вопросы типа «А можно ли упростить решение?».

В частности, в задаче 2 угол δ является внешним для ΔCDE. Это наблюдение приводит нас к следующему свойству «Внешниий угол треугольника равен сумме двух смежных с ним углов»:

$$\delta = y + \gamma$$

Но этот угол является внешним углом треугольника ΔABC, следловательно $y = \alpha + \beta$. Таким образом $\delta = \alpha + \beta + \gamma$.

Вопросы, задачи и задания

1. Один из углов треугольника равен разности двух несмежных с ним внешних углов. Докажите, что этот треугольник – прямоугольный.
2. Докажите, что высоты, проведенные к боковым сторонам равнобедренного треугольника с углом 150° при вершине, равны.
3. Докажите, что медианы равностороннего треугольника делятся их точкой пересечения в отношении 2:1, считая от вершины.
4. Докажите, что биссектриса внешнего угла при вершине равнобедренного треугольника параллельна основанию.
5. Сформулируйте теорему, обратную теореме задачи 4, и докажите ее.
6. Докажите, что любые две медианы равностороннего треугольника пересекаются под углом 60°.

7* Докажите признак равенства треугольников по двум сторонам и медиане, проведенной к третьей стороне.

8. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ проведены медианы BM и B_1M_1. Докажите, что $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$, если $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ и $BM = B_1M_1$.

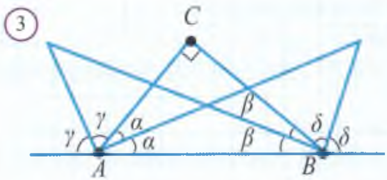
9* В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ проведены биссектрисы AD, A_1D_1. Докажите, что $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$, если $AB = A_1B_1$, $BD = B_1D_1$ и $AD = A_1D_1$.

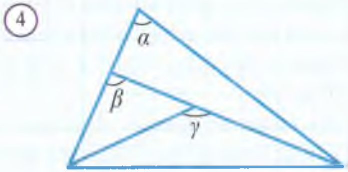
10* В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ проведены высоты BH и B_1H_1. Докажите, что $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$, если $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$ и $BH = B_1H_1$.

11. Докажите, что треугольник, две высоты которого равны, является равнобедренным.

12* Докажите, что $\alpha + \gamma = \beta + \delta = 90°$ на рисунке 3.

13* Докажите, что $\alpha < \beta < \gamma$ на рисунке 4.





64-65 УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ НА ПОВТОРЕНИЕ

1. Геометрический диктант. Заполните пропуски в соответствии со смыслом предложений:

1. На плоскости через .... можно провести одну прямую.
2. .... угла делит угол на два равных угла.
3. Середина отрезка делит его на два ....
4. На плоскости существуют .... , принадлежащие прямой и ...., не принадлежащие ей.
5. Если треугольник равнобедренный, то углы .... равны.
6. У двух равных треугольников равны соответствующие .... и соответствующие ....
7. У равностороннего треугольника каждый угол равен ....
8. .... острых углов прямоугольного треугольника равна 90°.
9. Биссектриса развернутого угла делит его на ....
10. Две прямые, порознь параллельные третьей, ...
11. Две прямые, перпендикулярные одной прямой, ...
12. При пересечении двух параллельных прямых третьей получившиеся внутренние односторонние углы ....
13. Равноудаленные от концов отрезка .... лежат на серединном перпендикуляре к отрезку.
14. Точки окружности .... на равном расстоянии от ее центра.

2. Если в приведенных ниже предложениях имеются ошибки, найдите и исправьте их:

1. На плоскости через две точки можно провести две прямые.
2. Прямой угол равен 180°.
3. Смежные углы равны.
4. Сумма вертикальных углов равна 180°.
5. Отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противолежащей стороны, называется биссектрисой треугольника.
6. Периметром треугольника называется сумма его углов.
7. Сумма сторон треугольника равна 180°.
8. Прямые, пересекающиеся под углом 90°, называются параллельными прямыми.
9. Параллельные прямые пересекаются в одной точке.
10. Если катеты прямоугольного треугольника равны, то один из его углов равен 30°.

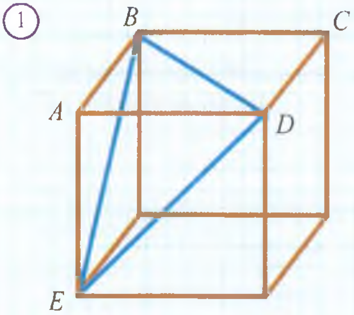
3. Запишите название геометрической фигуры, имеющей данное свойство, в соответствующую строку справа:

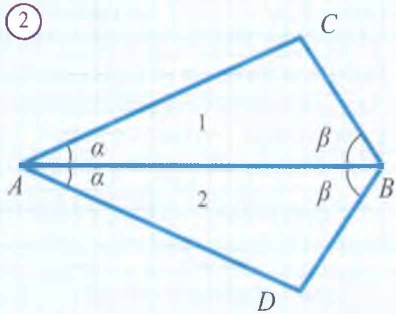
1. Длина 5 *см*. 2. Не пересекающиеся прямые.
3. Точка и два луча, исходящих из этой точки.
4. Высота, исходящая из вершины, будет также медианой и биссектрисой.
5. Треугольник с двумя равными сторонами. 6. Имеет два катета.
7. Делит угол на два равных угла.
8. Треугольник, все стороны которого равны.

4. Сопоставьте геометрическому понятию, данному в первом столбце, соответствующее свойство или толкование из второго столбца:

Геометрическое понятие	*Толкование, свойство*
1. Перпендикулярные прямые	А. Имеет определенную длину
2. Равносторонний треугольник	Б. Два угла равны
3. Окружность	В. Равен половине гипотенузы
4. Точка на биссектрисе угла	Г. Соединяет вершину с серединой противолежащей стороны
5. Паралельные прямые	Д. Смежный с одним из внутренних углов и равный сумме двух остальных углов
6. Катет против угла в 30°	Е. Не пересекается
7. Медиана	Ж. Пересекаются под углом 90°
8. Внешний угол треугольника	З. Стороны равны
9. Равнобедренный треугольник	И. Точки равноудалены от центра
10. Отрезок	К. Лежит на равных расстояниях от его сторон

5. Задачи





1. Докажите, что биссектрисы накрест лежащих углов образованных двумя параллельными и секущей, будут параллельны.
2. Докажите, что любая сторона треугольника больше разности двух других сторон этого треугольника.
3. Если для углов треугольника верны неравенства $\alpha<\beta+\gamma$, $\beta<\alpha+\gamma$, $\gamma<\alpha+\beta$, то что это за треугольник?
4. Постройте окружность, проходящую через две данные точки. Сколько решений есть у этой задачи?
5. Биссектриссы AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекаются в точке O. Найдите угол ACB, если а) $AOB = 136°$; б) $AOB = 111°$.
6. У изображенного на рисунке 1 куба BD=6. BE=?, DE=?, AC=?, BED=?
7. Медиана треугольника ABC, периметр которого равен 42 *см* делит его на два треугольника с периметрами 33 *см* и 35 *см*. Найдите длину этой медианы.
8. Под каким углом пересекаются биссектрисы острых углов в прямоугольном треугольнике?
9. Докажите, что на рисунке 2 треугольники 1 и 2 равны.
10. Какой фигурой является общая часть лучей MN и NM?
11. Точки A, B и C лежат на одной прямой. Будет ли точка B лежать на отрезке AC, если AB = 2 *см*, BC = 3 *см* и AC = 5 *см*? Обоснуйте свой ответ.
12. Точка A находится между точками B и C прямой BC. Найдите длину отрезка AB, если BC = 15 *см*, а отрезок AC меньше отрезка AB на 3 *см*.
13. Постройте углы 60° и 30°.
14. Постройте взаимно перпендикулярные диаметры окружности.

15. Найдите больший из смежных углов, если один из них в четыре раза меньше.

16. Отношение углов, образованных при перечении двух прямых равно 7:3. Найдите меньше из этих углов.

17. Точки A, B и C лежат на одной прямой. Найдите длину отрезка AC, если длина отрезка BC больше длины отрезка AC в три раза, а длина отрезка AB короче длины отрезка BC на 3,6 см.

18. Если сумма односторонних внешних углов образованных при пересечении двух прямых третьей, равна 180°, докажите, что эти две прямые параллельны.

19. Один из углов, образованный при пересечении двух параллельных прямых третьей, равен 55°. Найдите оставшиеся углы.

20. Биссектриса, проведенная на основание AB равнобедренного треугольника ABC делит его на два треугольника. Докажите, что эти треугольники равны.

21. В треугольние с периметром 30 *см* одна сторона больше другой на 2 *см*, но меньше третьей на 2 *см*. Найдите большую сторону треугольника.

22. Медиана, опущенная на основание треугольника делит его на два треугольника с периметрами 18 *см* и 24 *см*. Длина меньшей боковой стороны данного треугольника равна 6 *см*. Найдите большую боковую сторону.

23. Высота треугольника длиной 5 см делит его на два треугольника с периметрами 18 *см* и 26 *см*. Найдите периметр данного треугольника.

24. Периметр равнобедренного треугольника равен 7,6 *см*, основание равно 2 *см*. Найдите длину боковой стороны.

25. Прямые AB и CD пересекаются в точке O. Сумма углов BOC и AOD равна 194°. Найдите угол AOC.

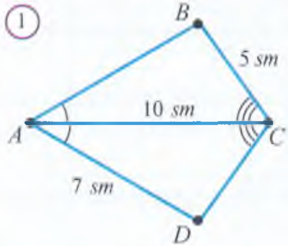
26. В треугольнике ABC угол A равен углу C, а высота AD делит сторону BC попалам. Найдите AC, если $BD = 7{,}8$ см.

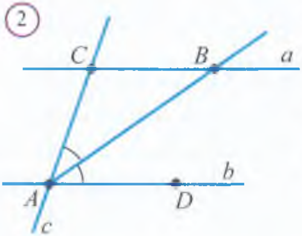
27. В равнобедренном треугольнике угол между высотой, опущенной на боковую сторону и второй стороной равен 20°. Найдите угол при основании треугольника.

28. Из точки D, лежащей на биссектрисе угла на его стороны опущены перпендикуляры DA и DC. Докажите, что $DA = DC$.

29. Точки A, B и C лежат на одной прямой. Найдите длину отрезка AB, если $AC = 7$ *м* и $BC = 9$ *м*.

ИТОГОВАЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА И РАБОТА НАД ОШИБКАМИ





Итоговая контрольная работа состоит из двух частей и на нее отводится два часа (66–67 уроки). В первой части предлагается по образцу уроков 64–65 решить 5 задач из диктантов и 10 тестов. Во второй части контрольной работы предлагаются 5 задач, подобных данным ниже.

Образец итоговой письменной работы.

Задача.

1. Один из смежных углов меньше второго на 18°. Найдите эти углы.
2. На основе данных на рисунке 1:
   а) докажите, что $\Delta ABC = \Delta ADC$;
   б) найдите периметр треугольника ACD.
3. Найдите длину отрезка BC, если $a \| b$, AC=7см и AB – биссектриса $\angle CAD$ (рис. 2).
4. В прямоугольном треугольнике высота, опущенная из вершины прямого угла, является также и биссектрисой. Постройте углы треугольника.
5. Постройте угол, равный данному углу, и его биссектрису.

Тесты

1. Сколько прямых, параллельных данной прямой, можно провести через данную точку?
   А) 1; Б) 2; В) 3; Г) 4.

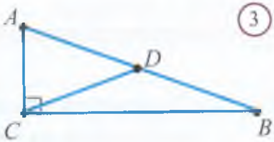
2. Сколько градусов составляет величина развернутого угла?
   А) 90°; Б) больше 90°; В) меньше 90°; Г) 180°.

3. Найдите гипотенузу AB, если в треугольнике ABC угол B=30°, угол C = 90° и AC = 10 см.
   А) 10 *см;* Б) 12 *см;* В) 15 *см;* Г) 20 *см.*

4. $AB = BC$, $AB = AC + 7$ (см) в треугольнике ABC. Найдите меньшую сторону ΔABC, если его периметр равен 23 см.
   А) 3 *см;* Б) 5 *см;* В) 7 *см;* Г) 9 *см.*

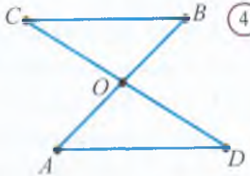
5. Один из смежных углов больше второго в 3 раза. Найдите разность этих углов.
А) 45°; Б) 60° ; В) 75°; Г) 90°.

3



6. Радиус окружности 3,2 *см*. Найдите ее диаметр.
А) 3,2; Б) 5,2; В) 6,4; Г) 1,6.

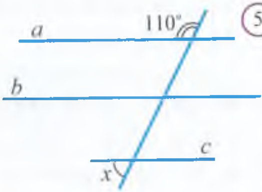
4



7. *ABC* – прямоугольный треугольник (*рис. 3*), $\angle C = 90°$, *CD* – медиана. Найдите $\angle A$, если $\angle BDC = 130°$.
А) 45°; Б) 65°; В) 75°; Г) 85°.

8. Угол при вершине *B* равнобедренного треугольника *ABC* равен 80°. Найдите внешний угол при вершине *A*.
А) 130°; Б) 120°; В) 110°; Г) 100°.

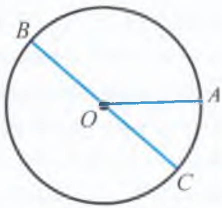
5



9. Какой из ответов верен, если $a \perp b$, $b \perp c$, $c \perp d$?
А) $a \| c$; Б) $b \perp d$;
В) $a \| d$; Г) $b \| c$.

10. Найдите периметр треугольника *AOD*, если *AO*=*OB*, *OC*=*OD*, *BC*=5*см* и *AO*+*OC*=7 *см* на рисунке 4.
А) 5 *см;* Б) 7 *см;*
В) 12 *см;* Г) 17 *см.*

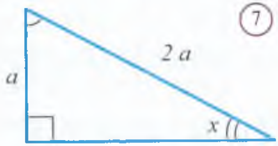
6



11. Найдите угол *x*, если $a \| b$ и $b \| c$ на рисунке 5?
А) 60°; Б) 70°; В) 80°; Г) 90°.

12. Определите большую сторону треугольника *ABC*, если $\angle A = 50°$ и $\angle B = 70°$.
А) *AB*; Б) *BC*; В) *AC*;
Г) определить невозможно.

7



13. Найдите длину отрезка *BC*, если точка *O* – центр окружности, *AO*=4 *см* на рисунке 6.
А) 4 *см;* Б) 5 *см;* В) 2 *см;* Г) 8 *см.*

14* Найдите меньший угол треугольника, изображенного на рисунке 7.
А) 30°; Б) 45°; В) 60°; Г) 90°.

2. **5.** 1. **7.** а) сколько угодно; б) 1; в) 1 или вообще невозможно. **9.** 5; 8.

3. **1.** A и C; A и B. **3.** Да; Нет. **5.** а) 2; б) 3; в) 4; г) 11; д) $(n+1)$. **6.** 6. **7.** 8 ta. **8.** 4, 6. **9.** 4. **10.** Да.

4. **8.** 6: AB, BC, CD; AC; AD; BD.

5. **9.** B между A и C. **10.** 15 *см*.

6. **4.** 4 *см*; 5 *см*; 6,5 *см*; 1 *см*; 2,5 *см*; 1,5 *см*. **5.** а) 6,6; б) 1; в) 9. **6.** 12,8 *см*. **7.** 0,8. **9.** Возможны 2 случая; если точка B лежит на отрезке AC, $AC = 800$ *м*. точка C лежит на отрезке AB, $AC = 400$ *м*.

7. **9.** а) 36 *мм*; б) 90 *см*; в) 4 *м* 22 *см*. **10.** а) 5 *см*; б) 3,5 *см*; в) 57 *см*. **13.** 130 *см*. **14.** 16 *м*.

10. **1-ая контрольная работа:** **1.** $BC = 3$ *см*. **2.** $BC = 12$ *см*. **3.** $\angle BOC = 35°$ **4.** 150°.

11. **8.** $\angle AOD$, $\angle COB$, $\angle DOB$, $\angle AOC$. **9.** 10, это: $\angle AOE$, $\angle EOD$, $\angle DOC$, $\angle COB$, $\angle BOA$, $\angle EOB$, $\angle EOC$, $\angle AOC$, $\angle AOD$, $\angle BOD$.

12. **4.** Да. **7.** а) 72°; б) 60°; в) 50°. **10.** а) Да; б) Нет; в) Нет. **12.** а) 90°; б) 180°.

13. **5.** 45°. **6.** а) 8; б) 8; в) 8; г) 8. **7.** 5 острых; 1 тупой. **10.** а) 30°; б) 180°; в) 1°. **11.** а) 0,5°; б) 2,5°; в) 15°. **14.** Луч OC биссектриса $\angle AOD$; луч OD биссектриса $\angle COE$; луч OE биссектриса $\angle DOB$; луч OD биссектриса $\angle AOB$.

14. **2.** 180°. **6.** а) 160°; б) 150°; в) 135°; г) 90°. **7.** 45°; 135°. **8.** а) Нет; б) Да; в) Нет. **9.** Да. **10.** а) 140°; б) 45°; в) 45°. **11.** а) 40°; 140°; б) 55°; 125°; в) 18°; 162°.

15. **8.** 1), 2), 3), 6). **9.** Нет, середины отрезков могут не совпадать.

16. **2.** 1. **3.** 90°. **6.** Сколько угодно.

17. **3.** 90°. **5.** OC . **6.** 60°; 60°.

19. **2.** 90°. **3.** 60°. **4.** Нет. **5.** Задача 2 имеет решение: z) 15°; 2) 65°. **6.** 15°. **9.** 6. **10.** 4.30 или 7.30. **11.** $\angle AOB = 110°$, $\angle BOC = 70°$; б) $\angle AOB = 36°$, $\angle BOC = 144°$; в) $\angle AOB = 112°$, $\angle BOC = 68°$; г) $\angle AOB = 150°$, $\angle BOC = 30°$. **12.** 50°, 130°, 50°, 130°.

20. **2-ая контрольная работа:** **1.** 106°. **2.** 60°. **3.** 48°.

21. **9.** а) а, б, г, д, ж; б) в, е, з; в) в, е.

22. **4.** а) QR; б) $\angle RPQ$ и $\angle RQP$; в) $\angle Q$ или $\angle PQR$; г) $\angle PQR$. **6.** а) прямоугольный; б) остроугольный; в) равнобедренный; г) равносторонний; д) тупоугольный.

23. **6.** В прямоугольном треугольнике. **7.** Да. **8.** 3. **9.** 9 **10.** 16.

24. **10.** д) $\angle D = 35°$, $\angle C = 62°$. **11.** 85°. **12.** Нет.

25. **2.** Углы при основании. **3.** 10. **4.** $a = 12$, $b = 8$. **10.** 8 *см*, 8 *см* и 11 *см*.

26. **4.** 4. **11.** $AC = BD = 7$.

27. **6.** $\Delta BAC = \Delta KAN$, $\Delta BAN = \Delta KAC$. **9.** 3.

28. **4.** В равностороннем треугольнике. **5.** 10,4 *см*. **7.** 8 *см*.

29. **6.** $\angle C_1 = 90°$, $\angle A_1 = 30°$, $\angle B_1 = 60°$. **7.** 10 *см*, 10 *см*.

30. **Задачи:** **7.** Да. **11.** 85°. **12.** 48°. **13.** 120°.

31. **3-ая контрольная:** **1.** 10. **3.** $3\frac{11}{15}$, $7\frac{1}{3}$, $7\frac{1}{3}$. **Тесты:** **1.** Б; **2.** В; **3.** Б; **4.** Г; **5.** В; **6.** А; **7.** В; **8.** А; **9.** Б; **10.** В; **11.** Б; **12.** Б; **13.** А; **14.** Б; **15.** В; **16.** А.

32. **7.** Нет, нет.

33. **4.** $\angle 1 = \angle 3 = \angle 5 = \angle 7 = 117°$, $\angle 4 = \angle 8 = 63°$.

34. **7.** а) Да; б) Да; в) Да; г) Нет. **9.** Может пересечь одну или все.

35. **6.** а) $\angle 3 = \angle 7 = 105°$, $\angle 2 = \angle 4 = \angle 6 = \angle 8 = 75°$. **9.** Нет.

36. **8.** 1) верно; 2) верно; 3) верно.

37. **5.** 45°. **8.** $\angle 2 = \angle 3 = 55°$. **9.** 70°, 110°. **12.** 60°, 120°.

39. **Задачи:** **1.** 55°. **2.** Да. **3.** Да **4.** $\angle 3 = \angle 7 = 118°$; $\angle 2 = \angle 4 = \angle 6 = \angle 8 = 62°$. **6.** 128°. **11.** 59°

40. **4-ая контрольная работа:** **1.** 34°, 146°, 146°. **3.** 48°, 132°. **Тесты:** **1.** А; **2.** Б; **3.** А; **4.** Г; **5.** В; **6.** В; **7.** В; **8.** Г; **9.** Б; **10.** Б; **11.** В; **12.** Г; **13.** А; **14.** Б; **15.** Г; **16.** А.

41. **3.** 1. **4.** 1. **5.** а) существует; б) не существует; в) не существует. **7.** а) 80°; б) 25°; в) 45°; г) 45°. **8.** а) 63°; б) 90°; в) 15°. **9.** а) 80°, 50°; б) 30°, 60°, 90°; в) 50°, 60°, 70°.

42. **3.** 60°, 45°, 75°. **4.** 30°, 120°. **5.** 75°. **6.** 270°. **7.** 90°. **8.** 90°. **9.** 110°. **10.** 60°. **11.** один может. **12.** 360°.

43. **1.** 50°; 90°; 40°. **2.** 60°; 48°. **5.** могут. **6.** 540°. **7.** 24°, 36°, 60°. **9.** а) 30°, 30°; б)70°, 40° или 55°, 55°. **10.** а) 15°, 150°; б) 75°, 30°. **12.** 15°; 65°. **13.** 30°. **14.** 67,5°. **17.** а) 65°; б) 45°; 90°; 45°. **18.** а) 79°; б) 100°. **19.** $x = 20°$, $y = 50°$. **21.** 60°. **22.** 60°, 60°, 60°. **23.** 45°, 90°, 45°.

44. **5.** Гипотенуза в 2 раза больше катета, лежащего против угла 30° . **7.** а) 4; б) 6; в) 60°. **8.** а) 5; б) 13,5; в) 9. **9.** 8 *см* и 16 *см*.

45. **4.** а) Нет; б) нет; в) будут; г) нет. **5.** а) будут; б) будут; в) будут; г) нет; д) нет. **7.** а) будут; б) будут; в) будут; г) нет; д) будут.

47. **2.** 7 *см*. **3.** 7 *см*, 7 *см*.

48. **2.** Наибольший $\angle ACB$, наименьший $\angle ABC$. **3.** а) $\angle ABC > \angle BAC > \angle ACB$ *нет*; б) $\angle ACB = \angle ABC < \angle BAC$ да. **4.** Основание, боковая сторона. **5.** Нет. **6.** а) $BC > AC > AB$; б) $BC < AC < AB$. **7.** Нет, нет. **8.** 60°; 60°; 120°; 120°. **9.** $0 < \angle B < 60°$. **10.** Остроугольный. **12.** Гипотенуза.

49. **3.** Нет. **4.** а) да; б) нет; в) да; г) да. **5.** а) 7; б) 10; в) 8 или 5. **7.** 7; 7; 11. **8.** 6. **9.** Треугольник или отрезок.

51. **5-ая контрольная работа:** **1.** 65°. **2.** 40°,60°,80°. **3.** 12 *см* **4.** 40°,60°,80°. **Тесты:** **1.** Б; **2.** В; **3.** Б; **4.** Б; **5.** В; **6.** Б; **7.** Б; **8.** Б; **9.** Г; **10.** А; **11.** В; **12.** А; **13.** В; **14.** А; **15.** В; **16.** В; **17.** В; **18.** В.

62. **1.** 20 *см*. **2.** 20°. **3.** 15°. **4.** 30°. **5.** 40°; 60°; 80°. **6.** 1 : 2. **7.** 76°. **8.** 42°. **9.** 21°, 69°. **10.** $\angle AOB = 122{,}5°$. **11.** 72°. **12.** 46°.

64. **3.** Остроугольный. **5.** а) 92°; б) 42°. **6.** 6; 6; 6; 60°. **8.** 45°. **10.** Отрезок. **11.** Да. **12.** 9 *см*. **15.** 144°. **16.** 54°. **17.** 3,6 *см*. **19.** 4 по 55° и 4 по 125°.

65. **Тесты:** **1.** А; **2.** Г; **3.** В; **4.** Б; **5.** Г; **6.** А; **7.** Г; **8.** В. **9.** В. **10.** А. **11.** А; **12.** В; **13.** Б; **14.** В; **15.** Г; **16.** А; **17.** Б; **18.** Г; **19.** А; **20.** В. **Задачи:** **2.** 12 *см*. **3.** 12 *см*. 4. 34. **5.** 2,8 *см*. **6.** 83°. **7.** 15,6 *см*. **8.** 55°. **10.** 2 *м* или 16 *м*.

66. **Итоговая контрольная работа:** **1.** 81°, 99°. **2.** б) 22 *см*. 3. 7 *см*.

ABDULLA A'ZAMOV, BAHODIR HAYDAROV, ERGASHVOY SARIQOV
ATAMURAT QO'CHQOROV, ULUG'BEK SAG'DIYEV

O'quv nashri

GEOMETRIYA

Umumiy o'rta ta'lim maktablarining 7-sinfi o'quvchilari uchun darslik

(rus tilida)

Tuzatilgan va to'ldirilgan uchinchi nashr

Toshkent — "Yangiyo'l poligraf servis" — 2017

Nashriyot litsenziyasi AI №185, 10.05.2011 y.

Переводчик — *Г. Юсупова*
Редактор — *Ш. Дадашева*
Технический редактор — *М. Риксиев*
Корректор — *С. Кучкарова*
Дизайн — *«H&J»*

Подписано в печать 16.11.2017 г.
Формат 70x100 1/16. Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура «Times New Roman»
Кегль 12. Условно-печатных листов 14.
Учетно-издательских листов 13. Тираж 60381. Заказ № 17-331.

22.151
Г 36
A'zamov, A.
Геометрия: Учебник для 7 кл. школ общ. сред. образ./ А. Аъзамов, Б.Хайдаров, Э. Сариков. – Третье исправленное и дополненное издание. – Ташкент: «Yangiyo'l poligraf servis», 2017. - 160 с.

УДК: 514=161.1(075.3)
ББК: 22.151я72

ISBN 978-9943-4935-2-0

Издательско-полиграфический творческий дом «Узбекистан»
Узбекского агентства по печати и информации
100011, Ташкент, ул. Навои, 30.

Сведения о состоянии учебника, выданного в аренду

№	Имя и фамилия ученика	Учебный год	Состояние учебника при получении	Подпись классного руководителя	Состояние учебника при сдаче	Подпись классного руководителя
1.						
2.						
3.						
4.						
5.						
6.						

При выдаче учебника в аренду и сдаче его в конце учебного года классным руководителем заполняется приведенная выше таблица в соответствии со следующими критериями.

Новый	Состояние учебника перед поступлением в аренду.
Хороший	Обложка целая, не оторвана от основной части книги. Все страницы имеются, целые, не порваны, не отклеены, на страницах нет надписей и линий.
Удовлетворительный	Обложка измята, исчерчена, края обтрепаны, отделена частично от основной части книги и отреставрирована пользователем. Реставрирование удовлетворительное. Вырванные страницы подклеены, некоторые страницы исчерчены.
Неудовлетворительный	Обложка исчерчена, разорвана полностью или частично оторвана от основной части книги, отреставрирована удовлетворительно. Страницы порваны, отсутствуют некоторые страницы, разукрашены, испачканы, восстановление невозможно.

Свободной продаже не подлежит

РЦКФ

ISBN 978-9943-4935-2-0

POLIGRAPH SERVICE